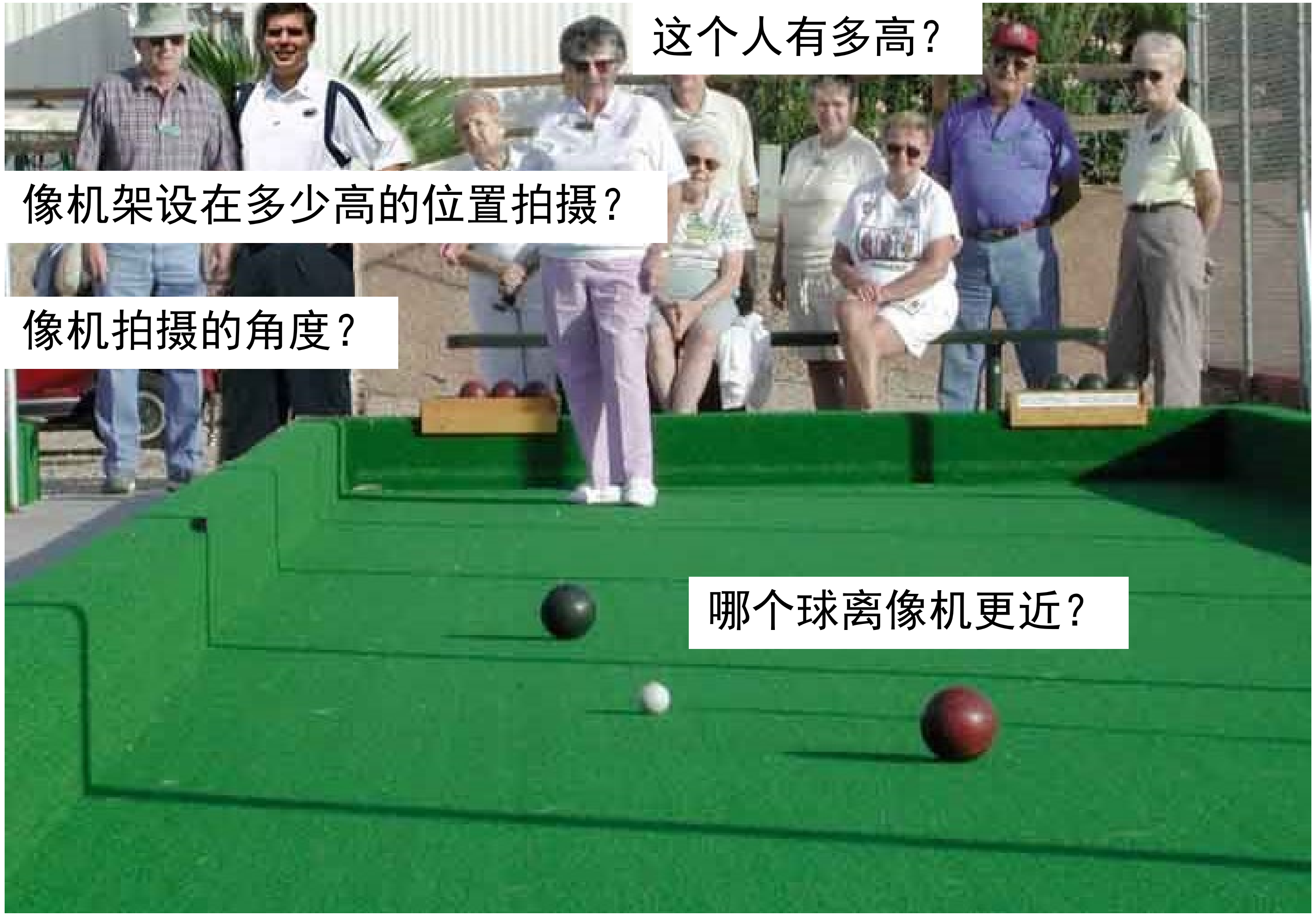
第二讲 图像采集

周文晖

计算机学院

计算机视觉的问题



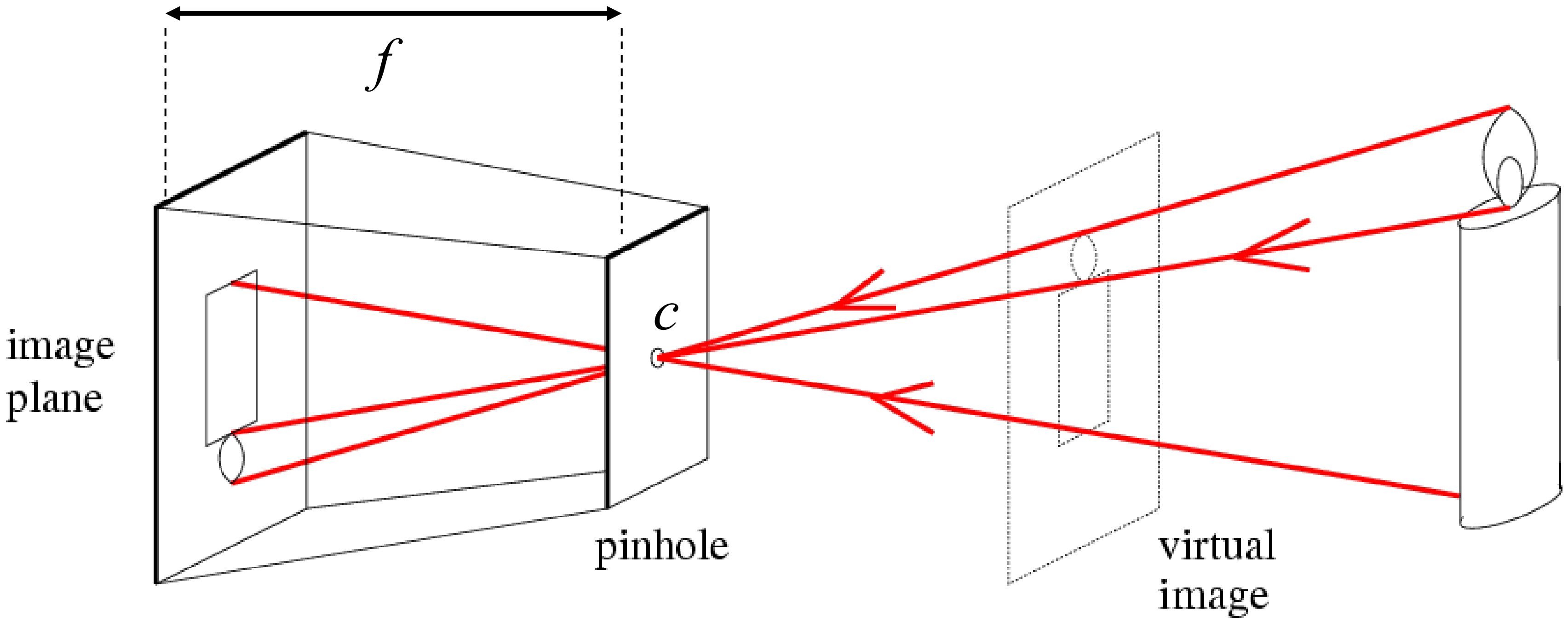
几何成像模型

- 像机与场景坐标系间的映射关系
  - 小孔成像模型
  - 射影几何（投影几何）
    - 灭点和灭线（Vanishing points and lines）
  - 投影矩阵

第二讲 图像采集

2.1 成像模型

小孔成像



f = 焦距

c = 像机中心

小孔像机——早期像机(暗室)

- 古中国和古希腊就已被发现和提出
- 中国春秋时期墨子的《墨经》是世界上最早对几何光学进行系统论述的典籍。

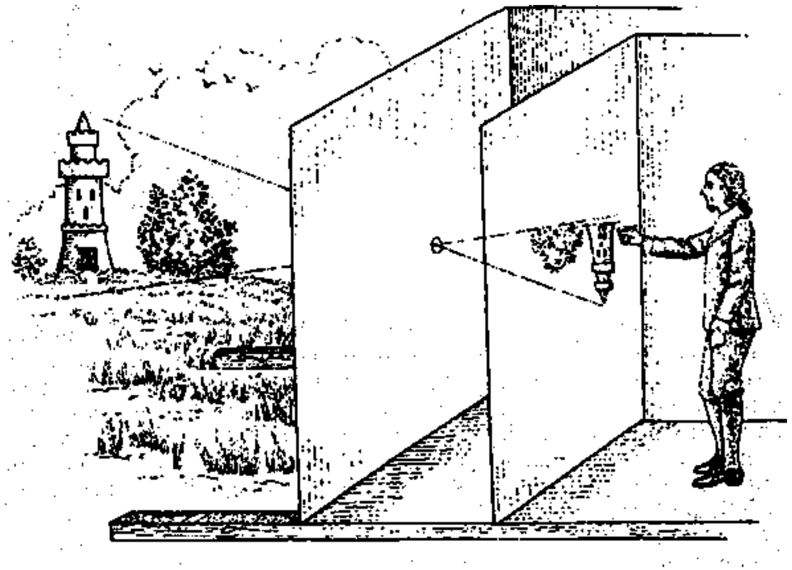


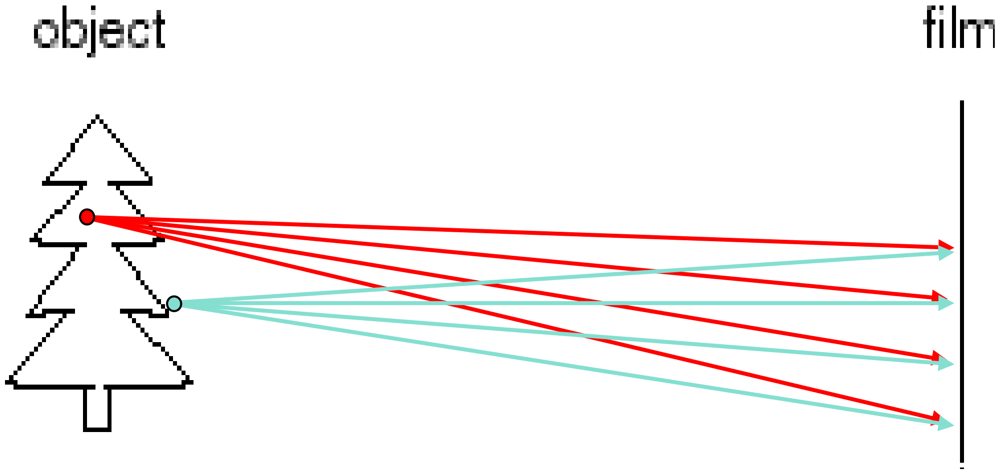
Illustration of Camera Obscura

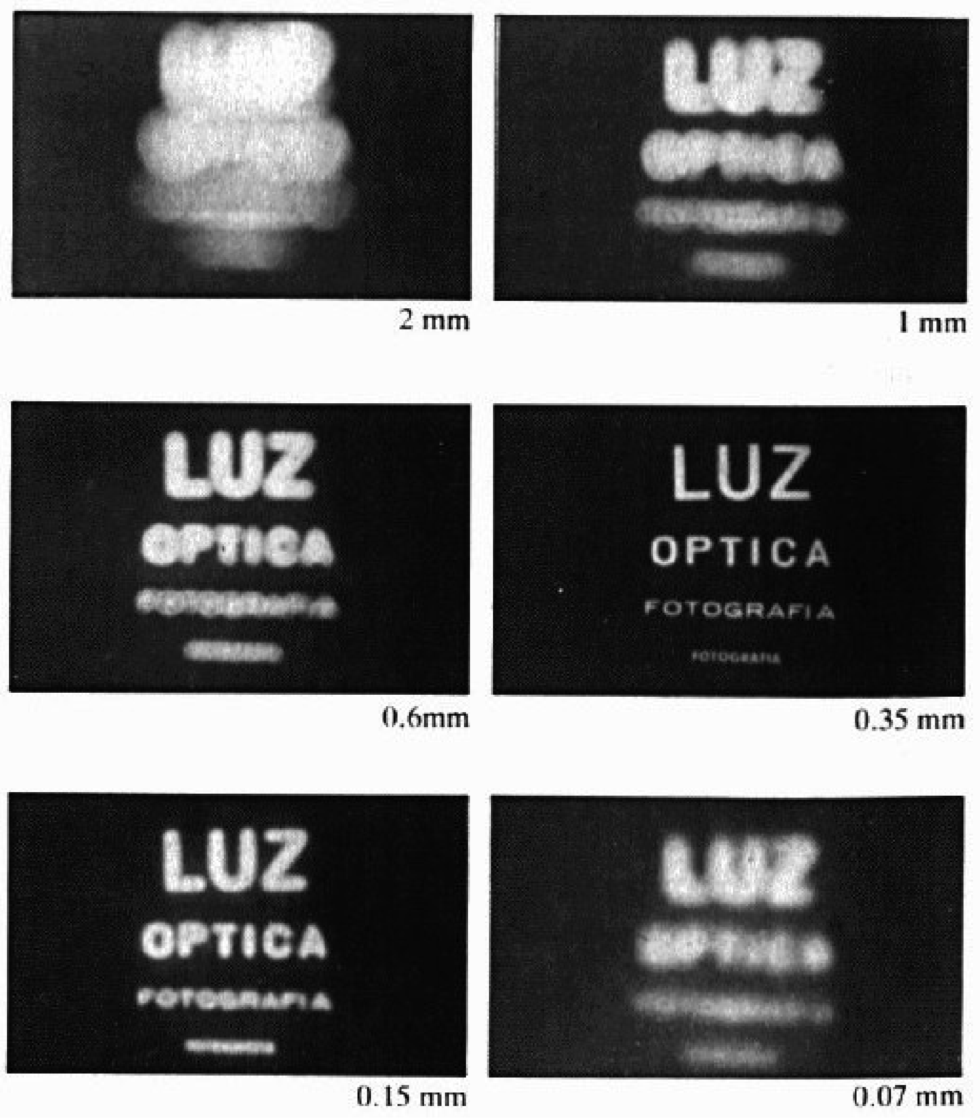
Freestanding camera obscura at UNC Chapel Hill

Photo by Seth Ilys

小孔像机的孔径选择

- 若孔径太大，多个方向光照平均后，造成图像模糊。





- 若孔径太小，衍射效应会导致图像模糊。

第一个带透镜的像机暗箱

- 1568年意大利Daniel Barbaro（丹尼尔巴尔巴洛）《远近实际方法》。采用了凸透镜。

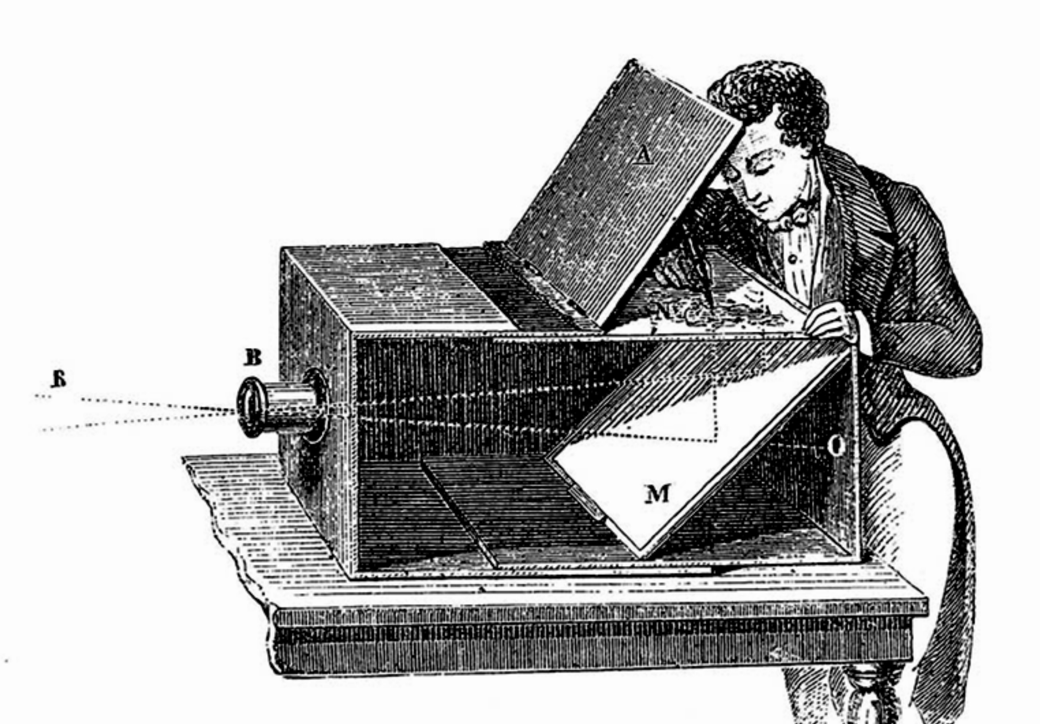


Fig. 434.

第一张像片

保留至今的最早像片，铅锡合金板上经8小时曝光

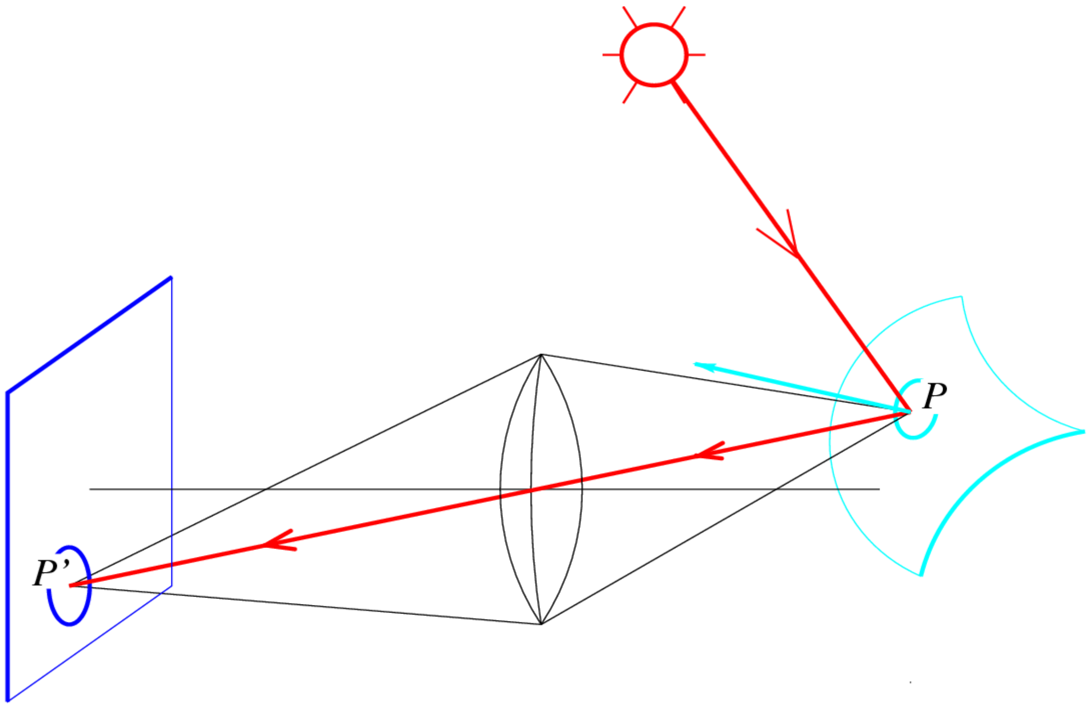
法国 Joseph Niepce, 1826

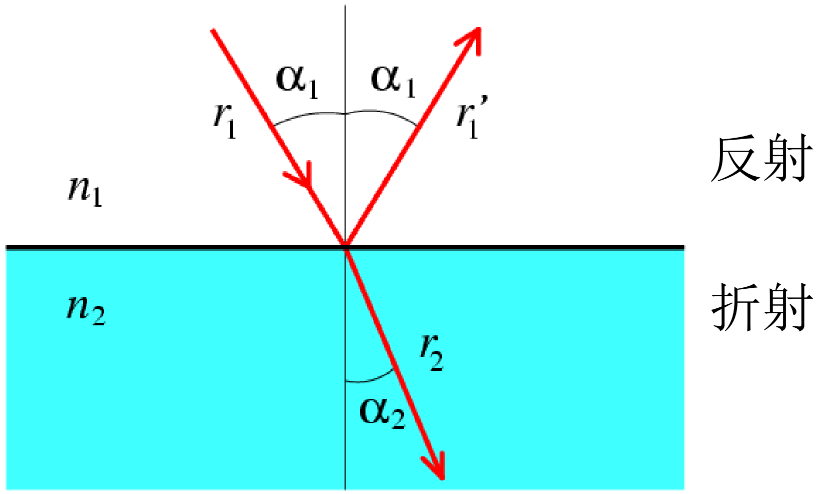
收藏在美国得克萨斯大学收藏馆

1839年，法国Louis Daguerre（达盖尔）发明“银版摄影技术”，人类史上第一个成功的发明摄影技术，命名为“达盖尔照相术”。

为什么要加透镜？

- 小孔成像只能通过某个方向的光线
- 经透镜后可汇集某方向范围内的光线。

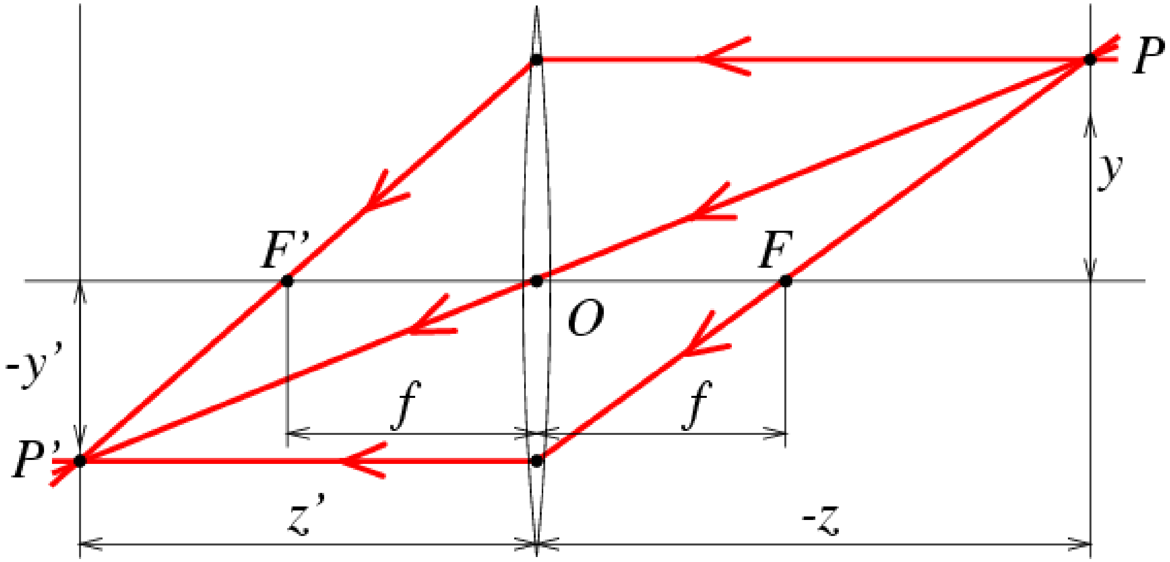




$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$

n: 折射率

薄透镜模型

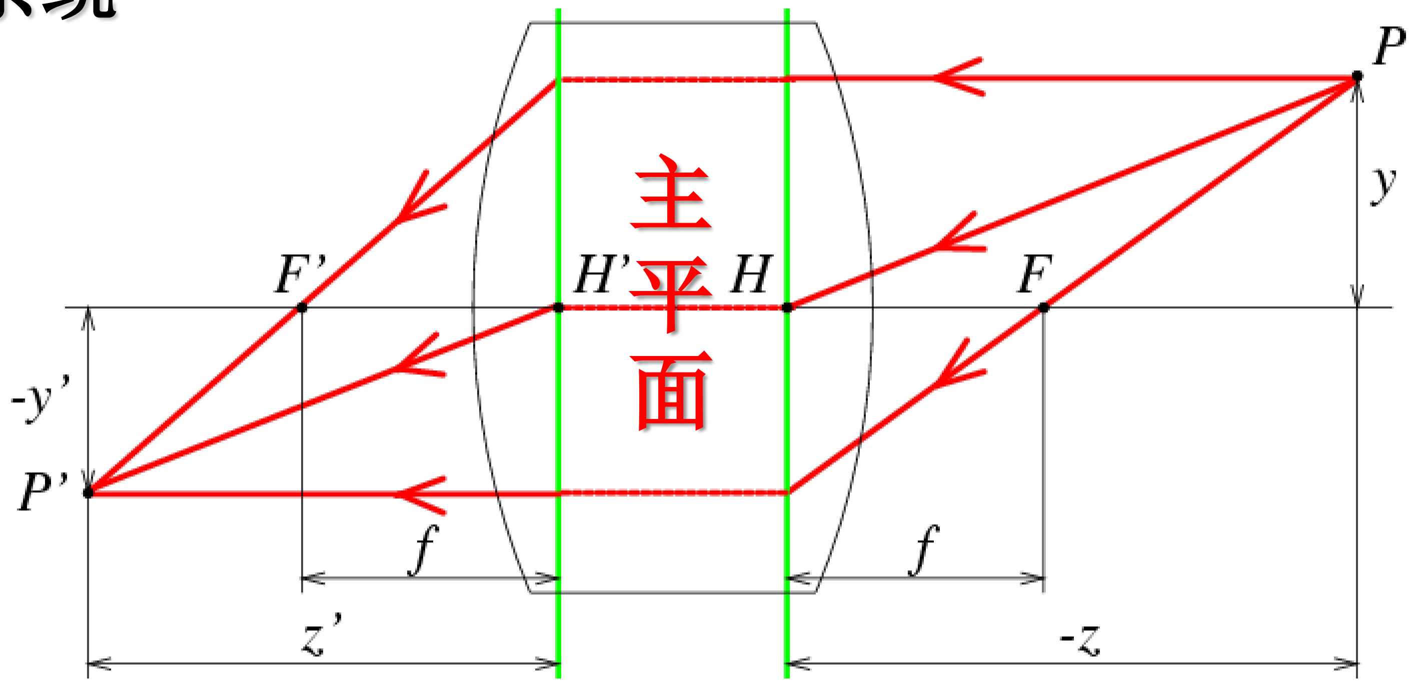


f: 焦距

F, F': 焦点

$$\begin{cases} x' = z'\dfrac{x}{z} \\ y' = z'\dfrac{y}{z} \end{cases} \quad \text{where} \quad \frac{1}{z'} + \frac{1}{z} = \frac{1}{f} \quad \text{and} \quad f = \frac{R}{2(n-1)}$$

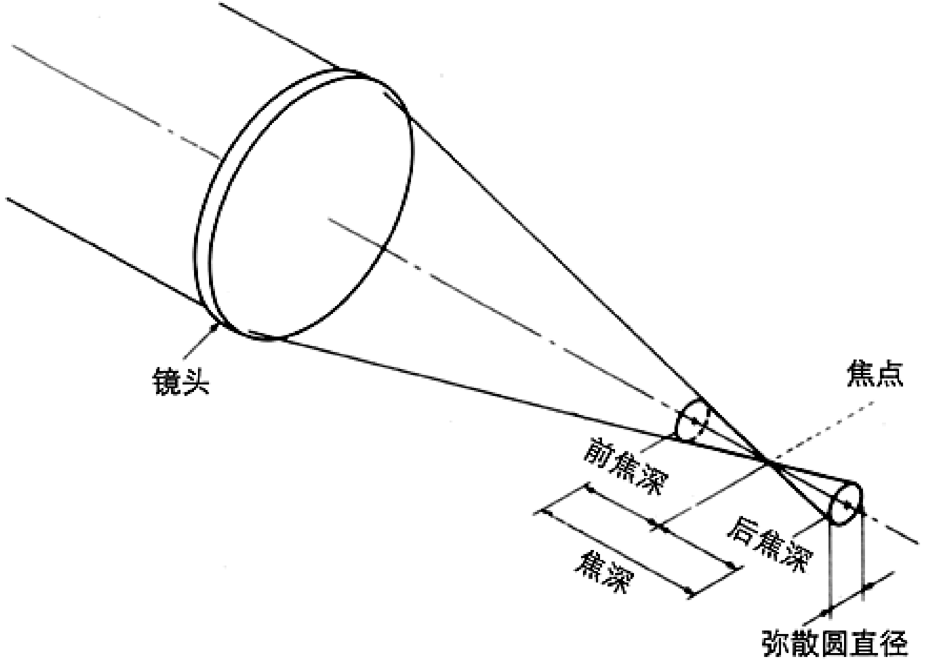
多透镜成像系统



- 主平面特性
  - a）主平面位置没有任何约束
  - b）主平面间无平移变换

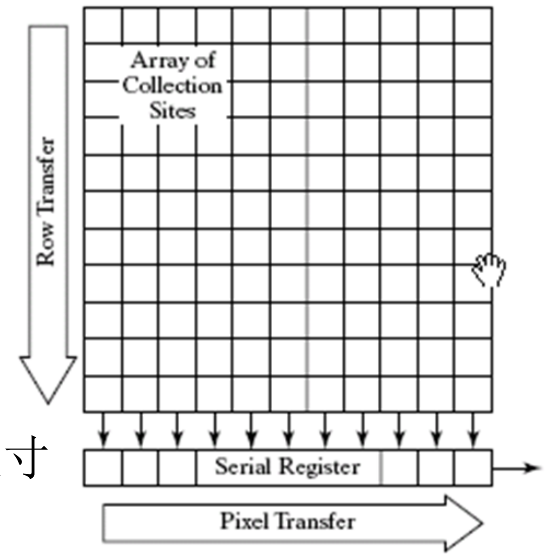
景深：弥散圆(circle of confusion)

- 光线射入凸透镜后，汇聚到焦点上
- 在焦点前后，光线开始聚集和扩散，点的影象变模糊，形成一个扩大的圆，这个圆就叫做弥散圆。

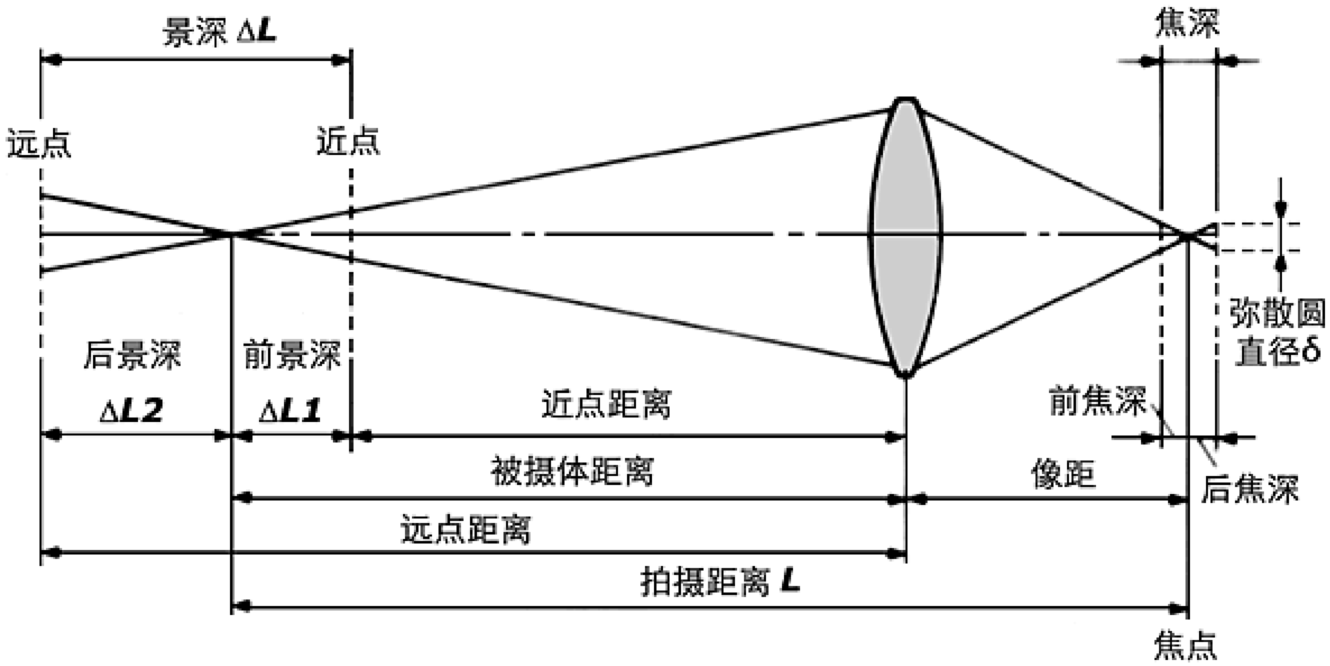


景深：容许弥散圆

- 若弥散圆的直径小于人眼的鉴别能力，即在一定范围内实际影象产生的模糊是不能辨认的。这个不能辨认的弥散圆就称为容许弥散圆。
- 在焦点前后各有一个容许弥散圆，这两个弥散圆之间的距离就叫景深。

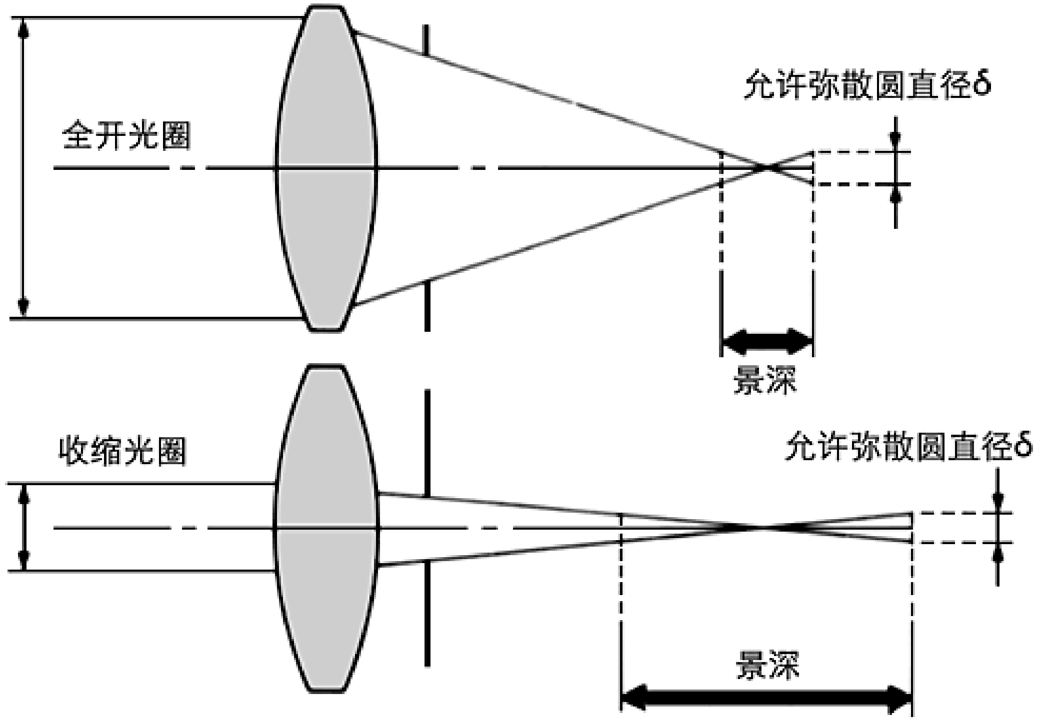


像素尺寸



景深：焦距与光圈值

- 景深随镜头的焦距、光圈值、拍摄距离而变化。
- 固定焦距和拍摄距离，使用光圈越小，景深越大。



f / 5.6

f / 32

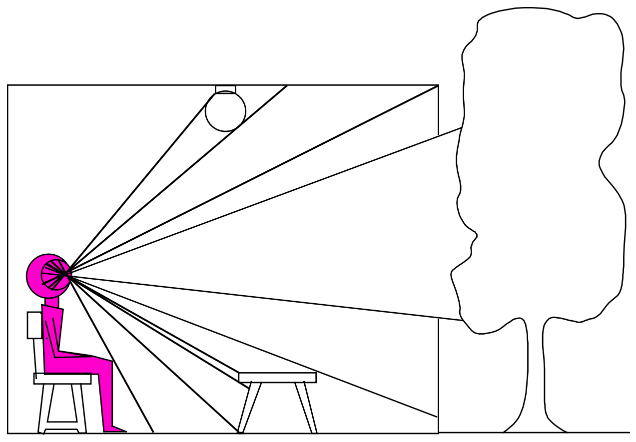
第二讲 图像采集

2.2 投影过程

投影过程：信息丢失

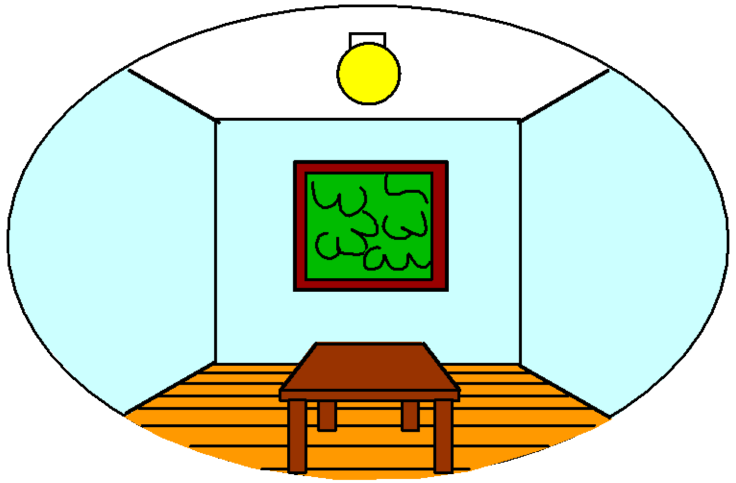
（三维→二维）

3D world



Point of observation

2D image

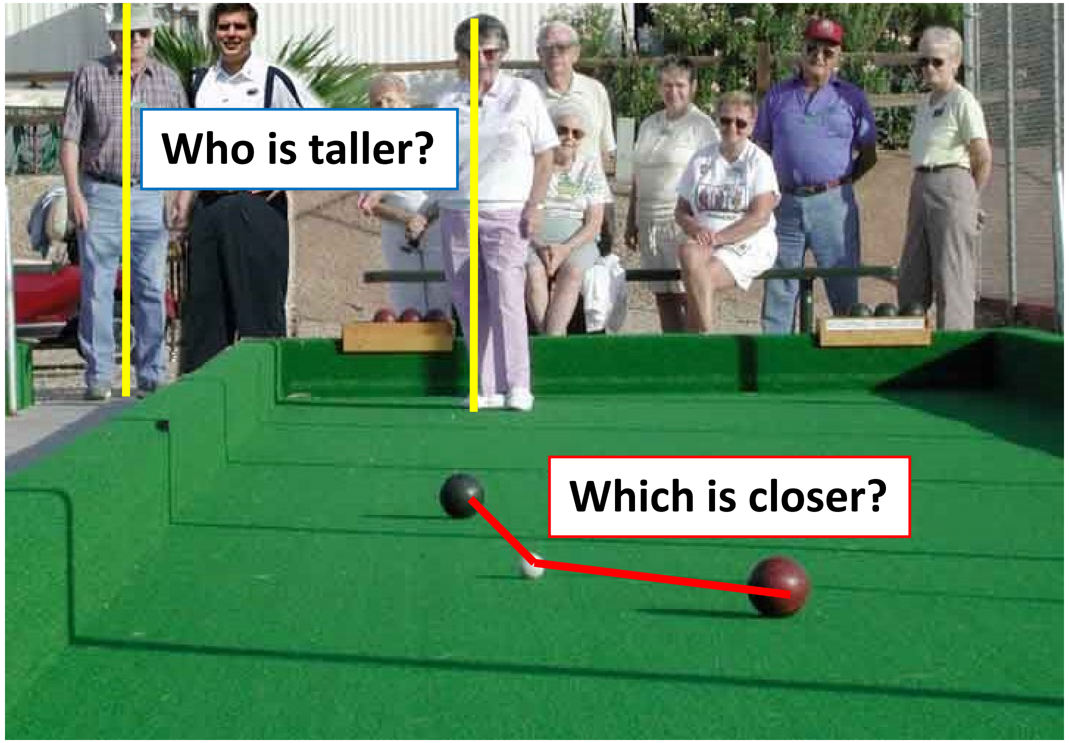


丢失了什么信息？

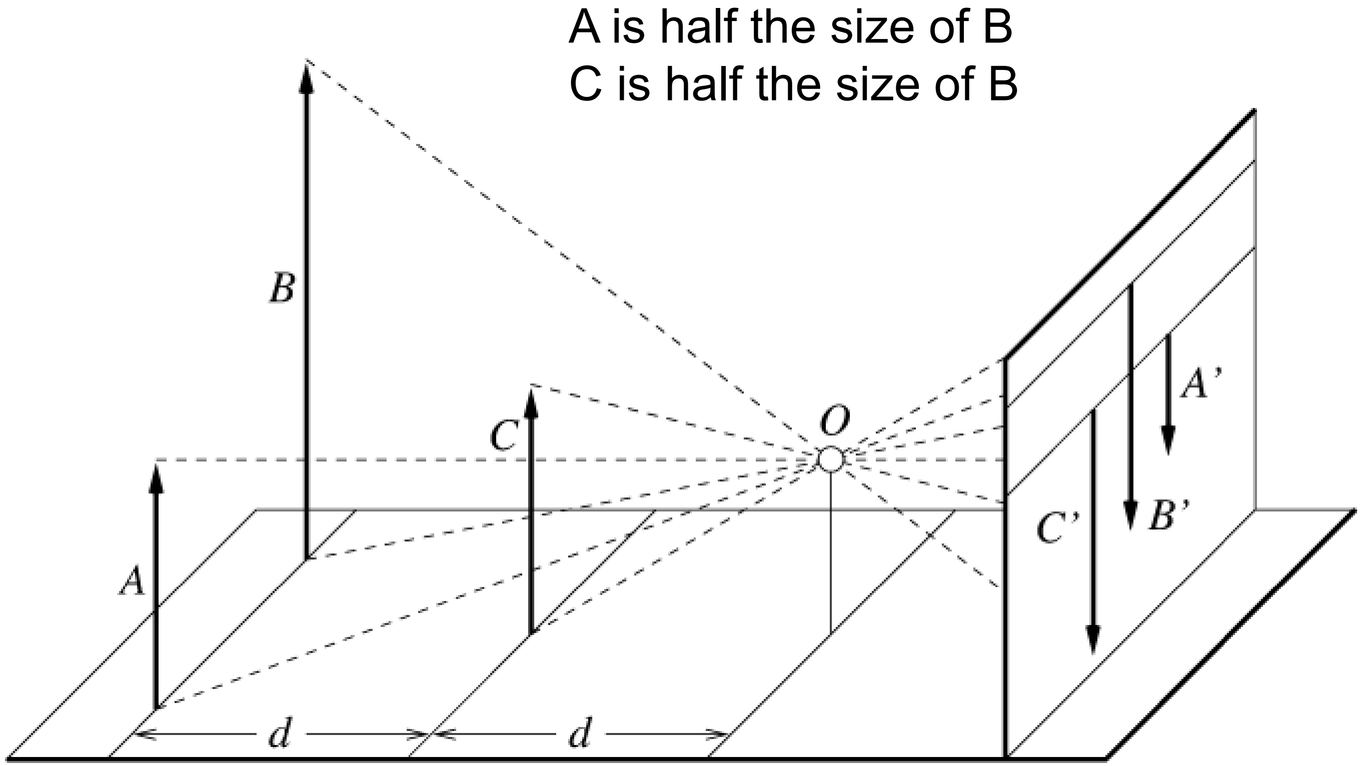
哪些信息得到保持？

射影几何：长度信息丢失

- 哪些物理信息丢失？
  - 长度

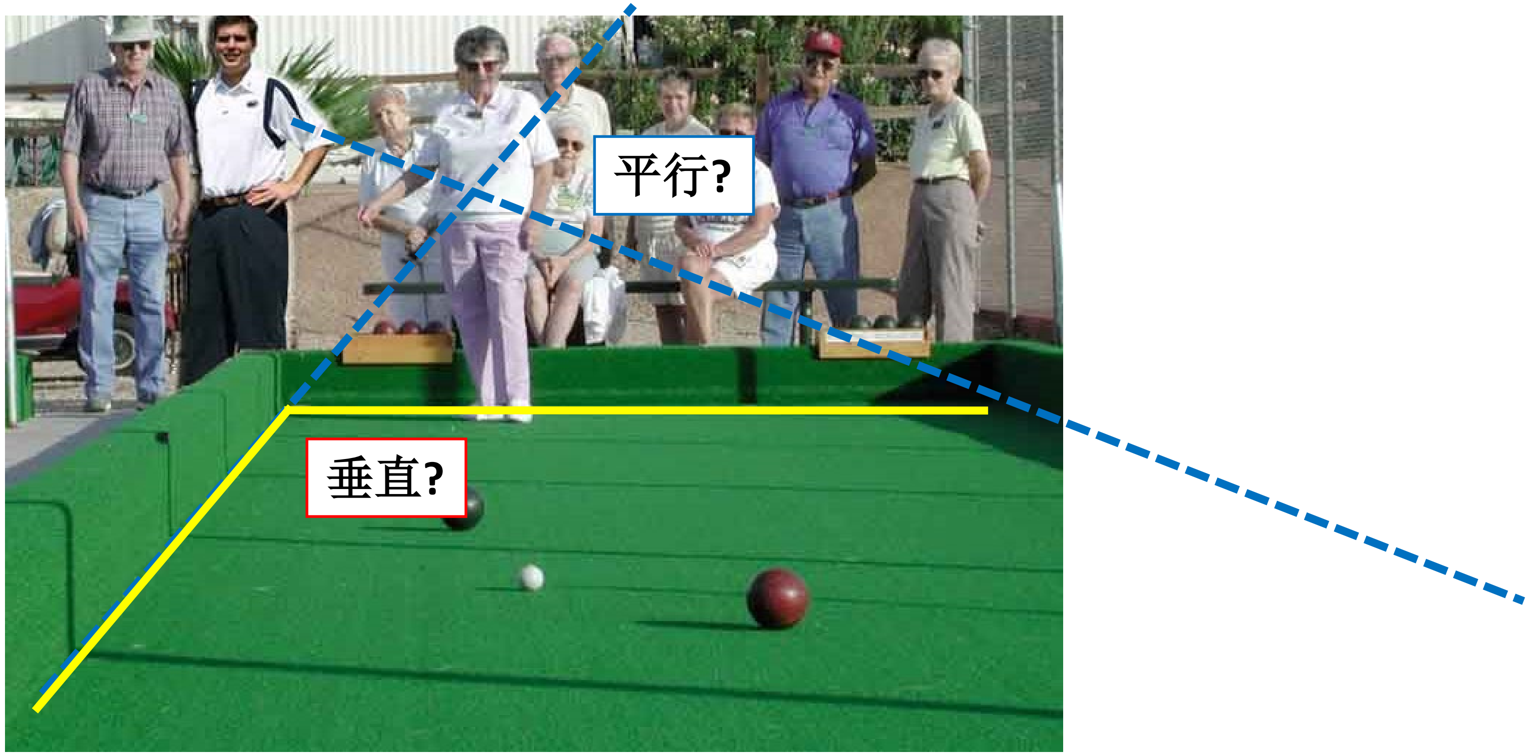


射影几何：长度信息丢失



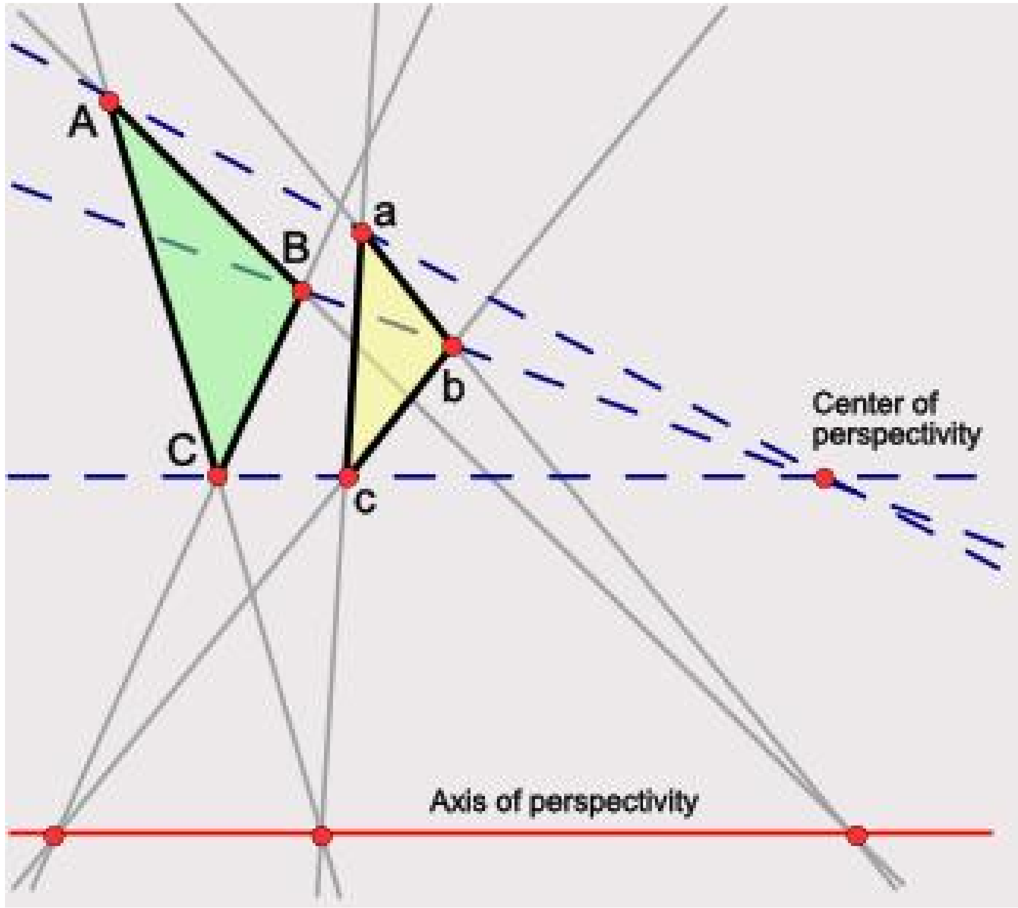
射影几何：角度信息丢失

- 还有哪些物理信息丢失？
  - 角度



射影几何：具有不变特性的属性

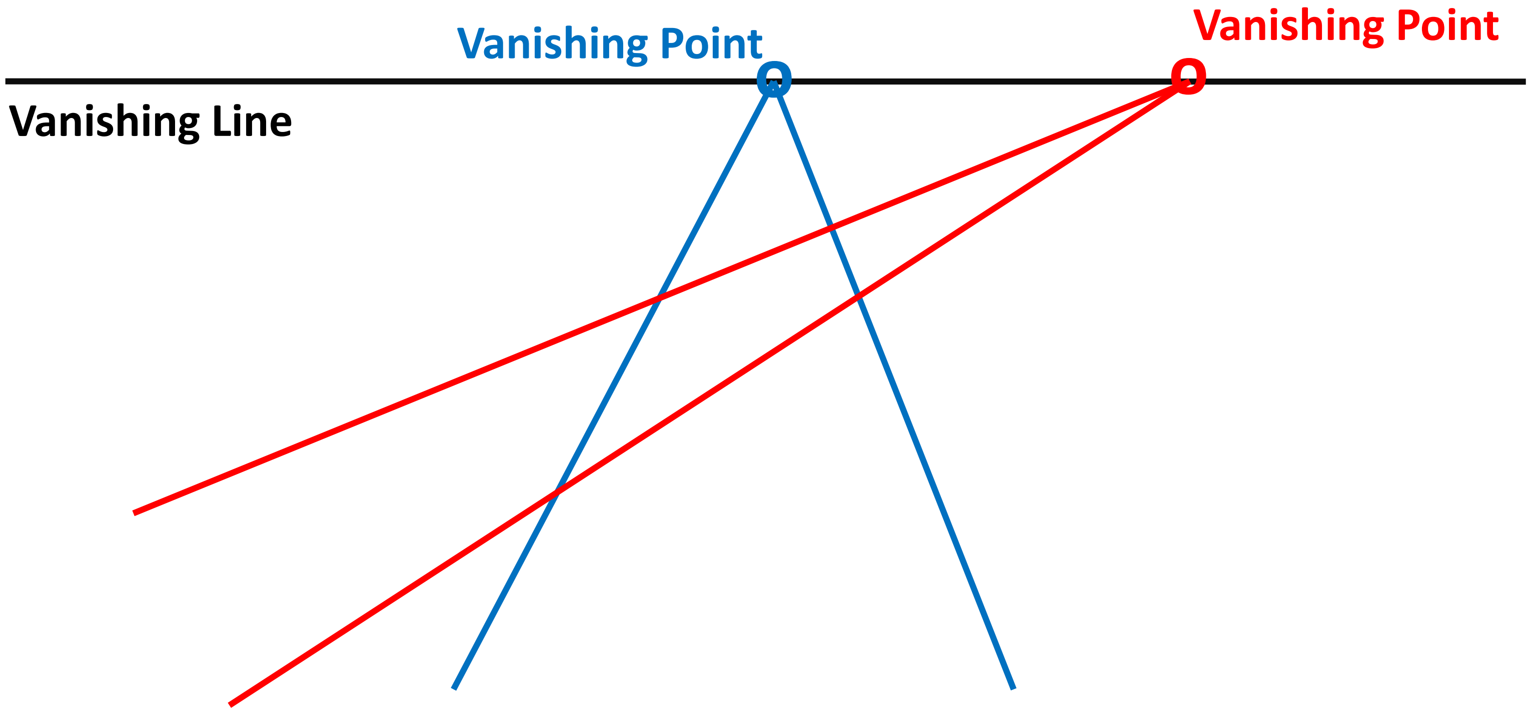
- 有哪些物理信息得以保持？
  - 直线特性
  - 交比不变性



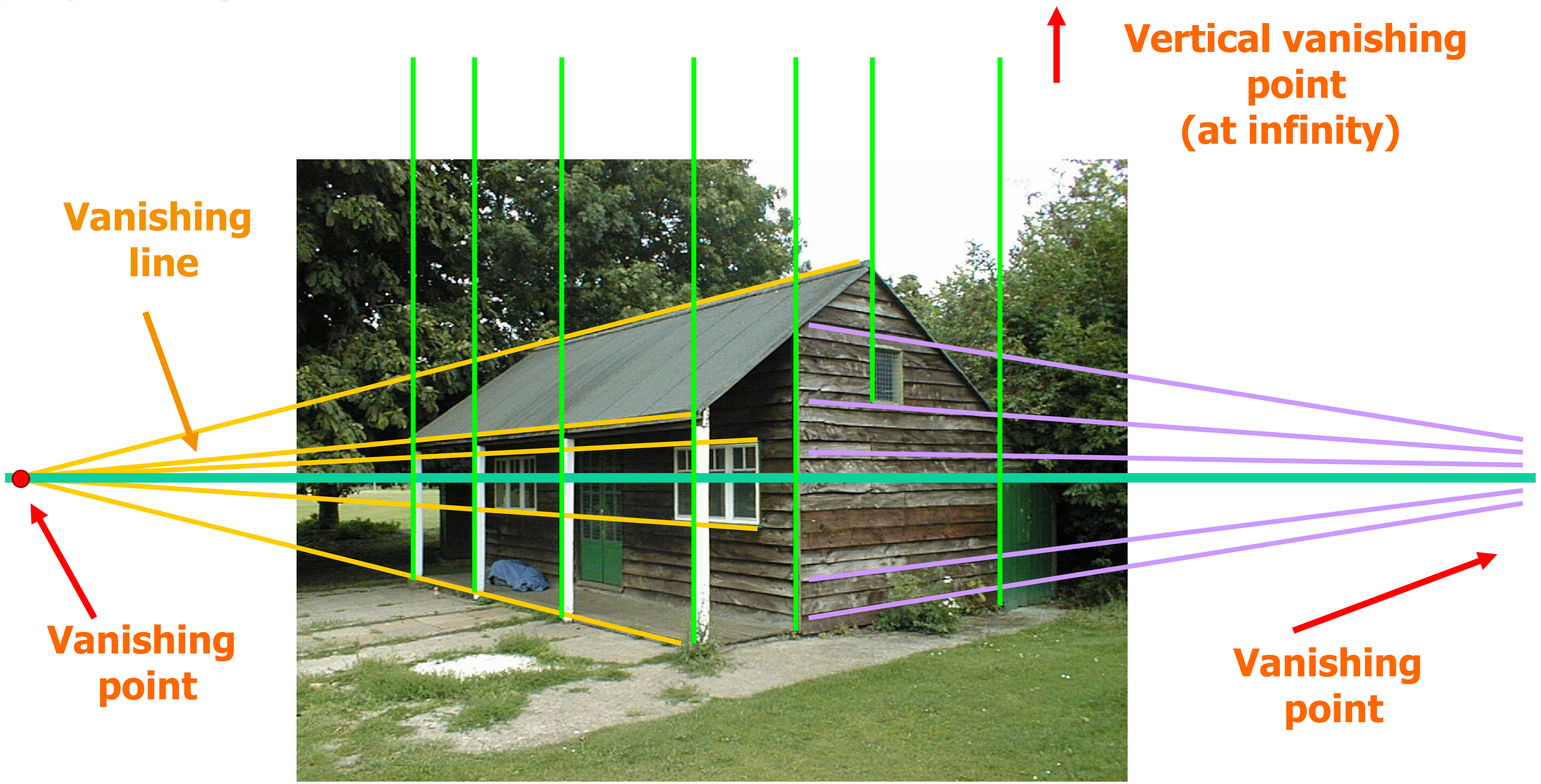
灭点（ Vanishing point）和灭线

- 场景中的平行线投影到图像平面后，会聚于“灭点”

灭点和灭线



灭点和灭线

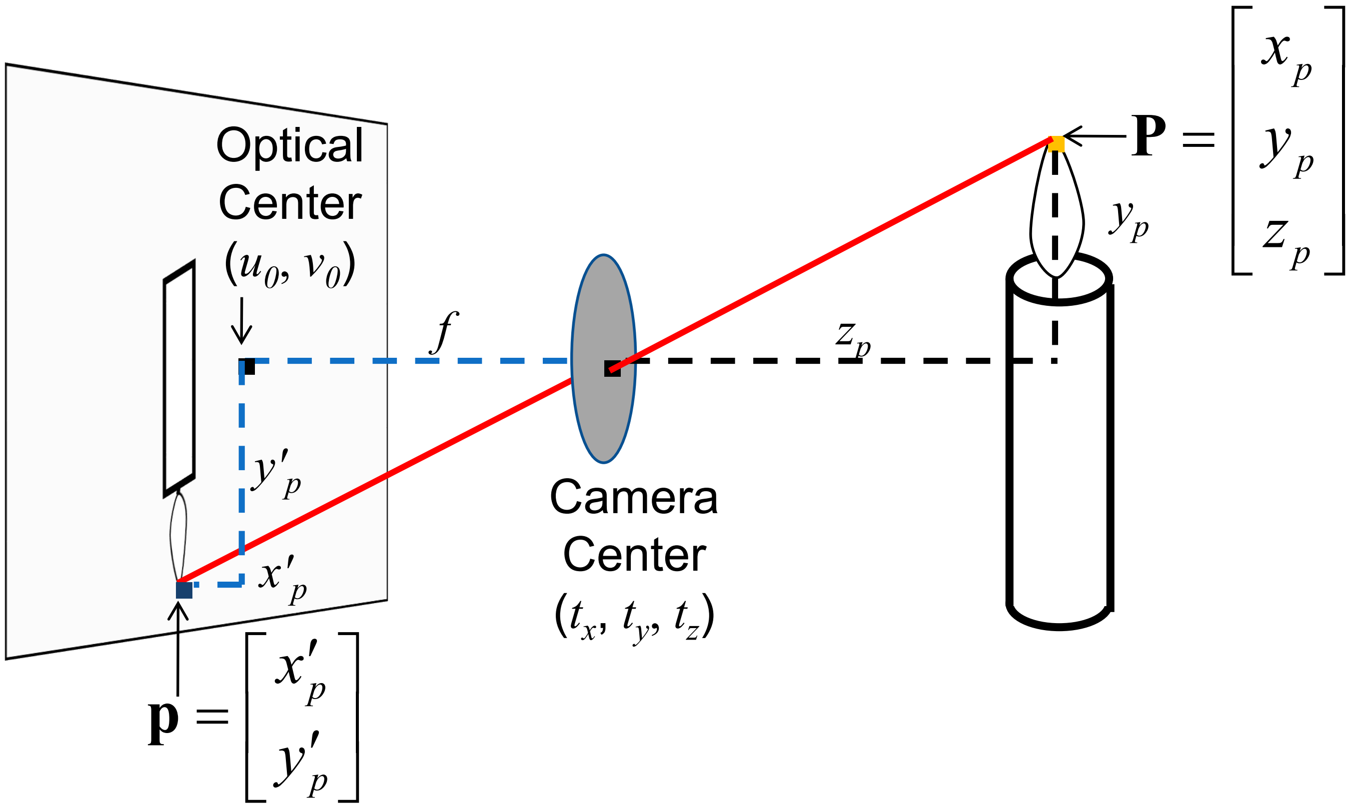

Vertical vanishing
point
(at infinity)
Vanishing
line
Vanishing
point
Vanishing
point

第二讲 图像采集

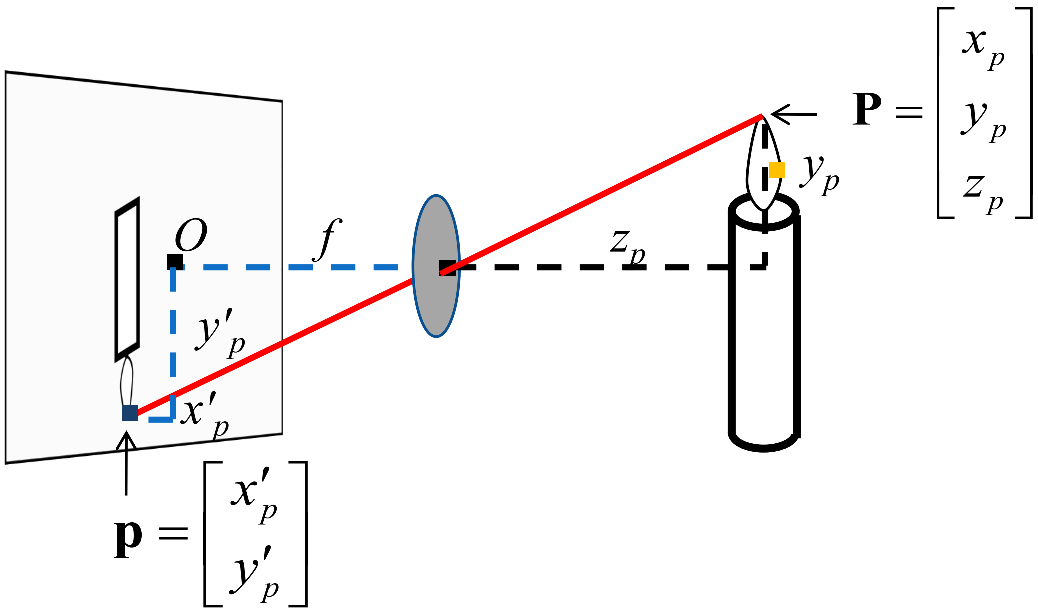
2.3 投影矩阵

成像过程：透视投影

- 三维场景 → 二维图像



投影公式



$$\begin{cases} x'_p = \lambda x_p \\ y'_p = \lambda y_p \\ f = \lambda z_p \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{x'_p}{x_p} = \frac{y'_p}{y_p} = \frac{f}{z_p} \Rightarrow \begin{cases} x'_p = f\dfrac{x_p}{z_p} \\ y'_p = f\dfrac{y_p}{z_p} \end{cases}$$

齐次坐标

- 笛卡尔坐标 → 齐次坐标

$$(x, y) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

图像坐标

$$(x, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

世界坐标

- 齐次坐标 → 笛卡尔坐标

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

齐次坐标

- 尺度不变性

$$k\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kw \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{kx}{kw} \\ \frac{ky}{kw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{w} \\ \frac{y}{w} \end{bmatrix}$$

齐次坐标　　　　笛卡尔坐标

- 笛卡尔坐标表示一个点对应于齐次坐标表示一条直线
- $w = 1$称为标准齐次坐标

投影矩阵

$$\begin{cases} x'_p = f\dfrac{x_p}{z_p} \\ y'_p = f\dfrac{y_p}{z_p} \end{cases}$$

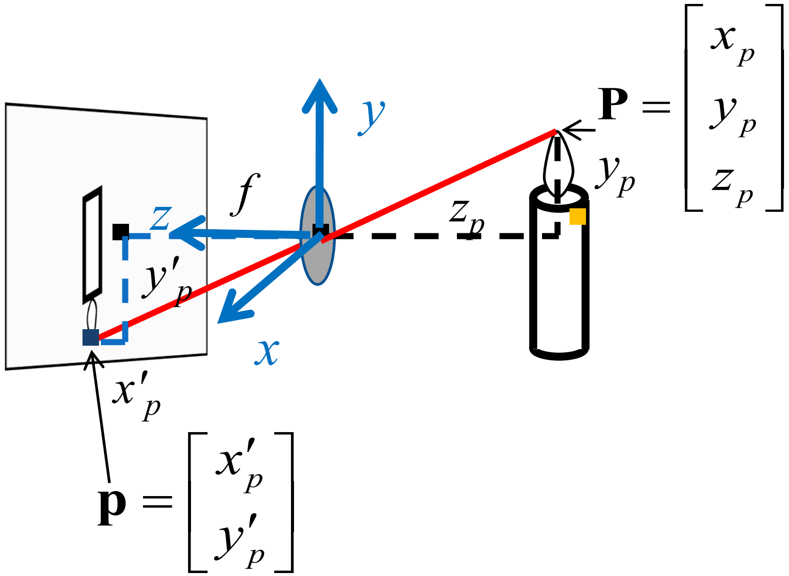
矩阵表示

$$z_p\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

齐次坐标表示

$$z_p\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

透视投影中坐标系



正确吗？

$$z_p \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

上述推导是不严谨的！

若P和p坐标值是同一个坐标系，正确！

像机坐标系 $\boxed{\text{（镜头中心为原点）}}$

透视投影中坐标系转换

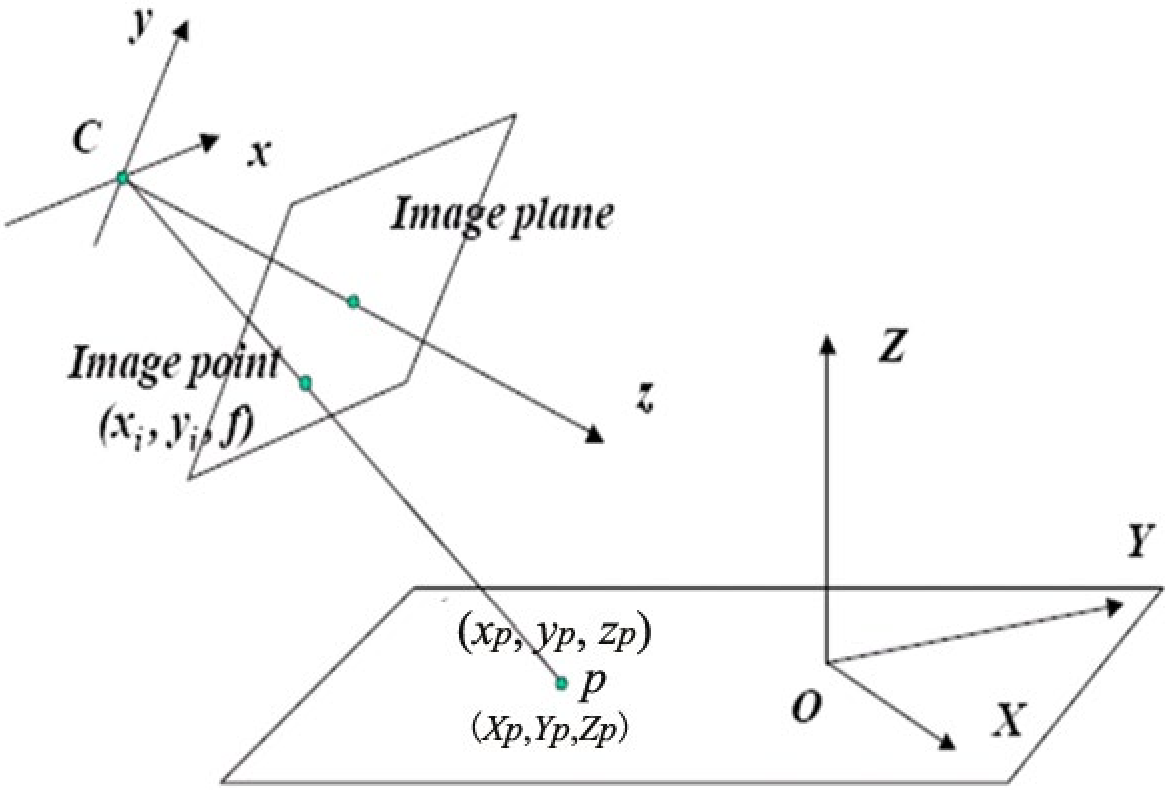
- 透视投影：世界坐标 → 图像坐标

- 之前基于像机坐标系的推导没意义？

- 三类坐标系间转换（笛卡尔坐标系）
  - 世界坐标系：*XYZ*
  - 像机坐标系：*xyz*
  - 图像坐标系：*uv*

它们的单位？

像机坐标系与世界坐标系间转换



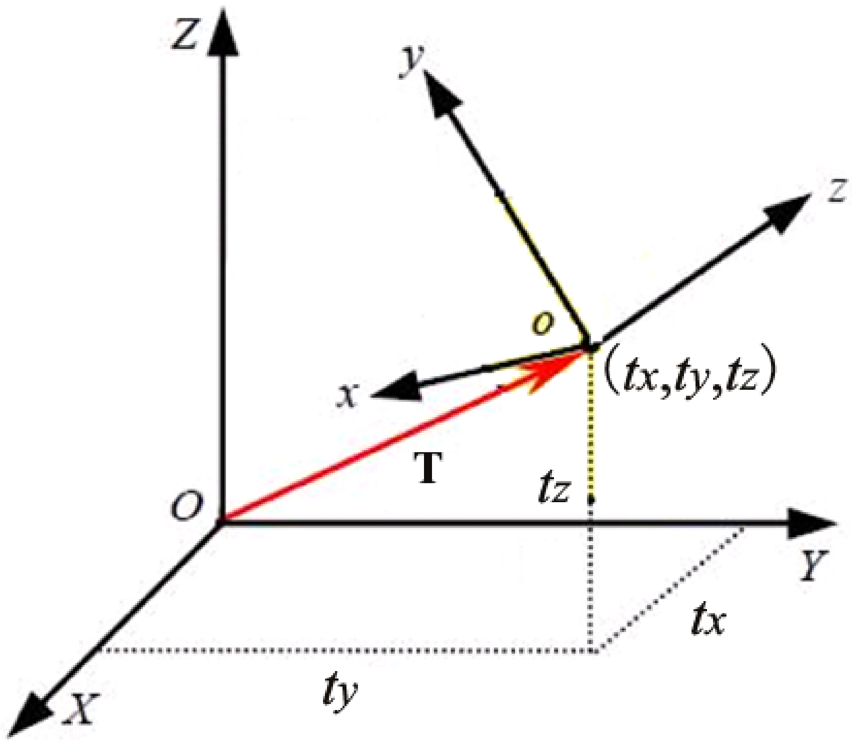
$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

场景点P在像机坐标系下坐标为(x_p, y_p, z_p)

在世界坐标系下坐标为(X_p, Y_p, Z_p)

平移矩阵

- 像机坐标系原点在世界坐标系下的坐标为(t_x, t_y, t_z)



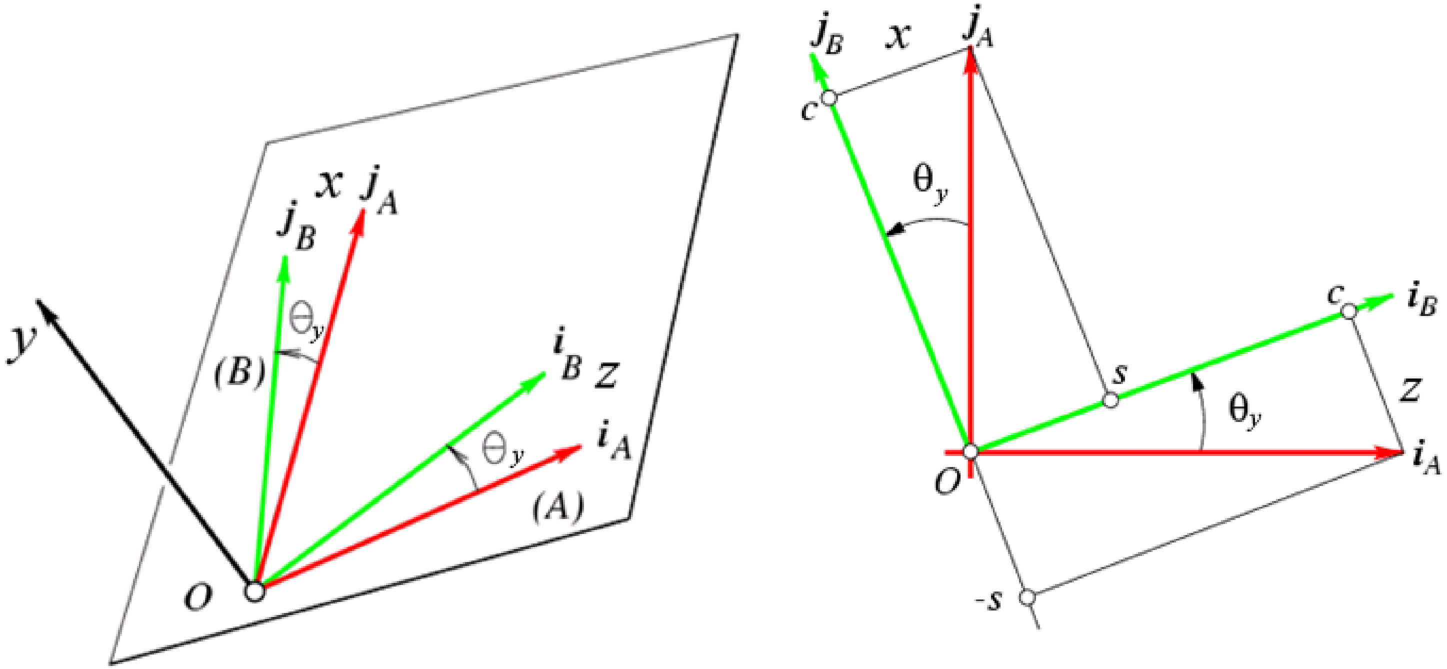
平移矩阵：

$$\mathbf{T}_{3\times1} = \begin{bmatrix} -t_x \\ -t_y \\ -t_z \end{bmatrix}$$

旋转矩阵

- 像机坐标系旋转过程分为三步：
  - 像机坐标系绕世界坐标系X轴旋转角度θ_x（偏转角）
  - 像机坐标系绕世界坐标系Y轴旋转角度θ_y（俯仰角）
  - 像机坐标系绕世界坐标系Z轴旋转角度θ_z（侧倾角）

旋转矩阵：绕Y轴旋转



$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}$$

旋转矩阵

$$\mathbf{R}_x=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x\end{bmatrix}\qquad \mathbf{R}_z=\begin{bmatrix}\cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0\\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

旋转矩阵：

$$\mathbf{R}_{3\times 3}=\mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x$$

$$
\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta_y \cos\theta_z & -\sin\theta_z & \sin\theta_y \cos\theta_z \\ \cos\theta_y \sin\theta_z & \cos\theta_z & \sin\theta_y \sin\theta_z \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta_y \cos\theta_z & \sin\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z - \cos\theta_x \sin\theta_z & \cos\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z + \sin\theta_x \sin\theta_z \\ \cos\theta_y \sin\theta_z & \sin\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z + \cos\theta_x \cos\theta_z & \cos\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z - \sin\theta_x \cos\theta_z \\ -\sin\theta_y & \sin\theta_x \cos\theta_y & \cos\theta_x \cos\theta_y \end{bmatrix}
$$

旋转矩阵的约束条件

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

R的9个参数应满足6个约束：

$$\mathbf{RR}' = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\begin{cases} r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1 \\ r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 = 1 \\ r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 1 \\ r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} + r_{13}r_{23} = 0 \\ r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32} + r_{13}r_{33} = 0 \\ \boxed{r_{21}r_{11} + r_{22}r_{12} + r_{23}r_{13} = 0} \quad \text{重复} \\ r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} + r_{23}r_{33} = 0 \\ \boxed{r_{31}r_{11} + r_{32}r_{12} + r_{33}r_{13} = 0} \quad \text{重复} \\ \boxed{r_{31}r_{21} + r_{32}r_{22} + r_{33}r_{23} = 0} \quad \text{重复} \end{cases}$$

旋转矩阵的约束条件

- **R**为正交矩阵

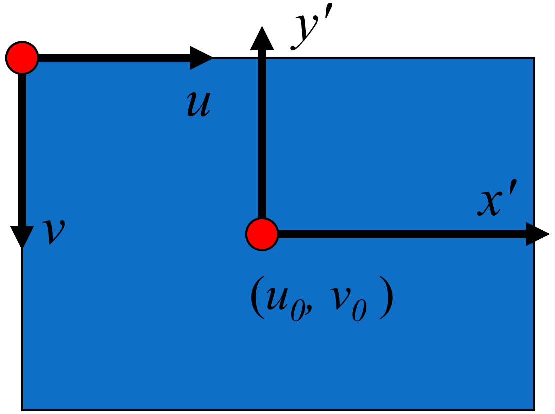
$$\mathbf{RR}' = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

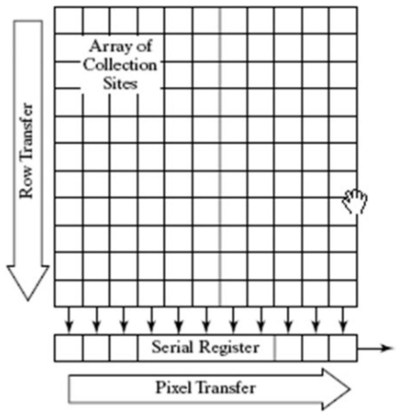
- 有

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}'$$

像机坐标系与图像坐标系间转换

- 通常图像坐标系uv平面与像机坐标系xoy平面平行





每个像素在x'和y'方向的物理尺寸为dx，dy

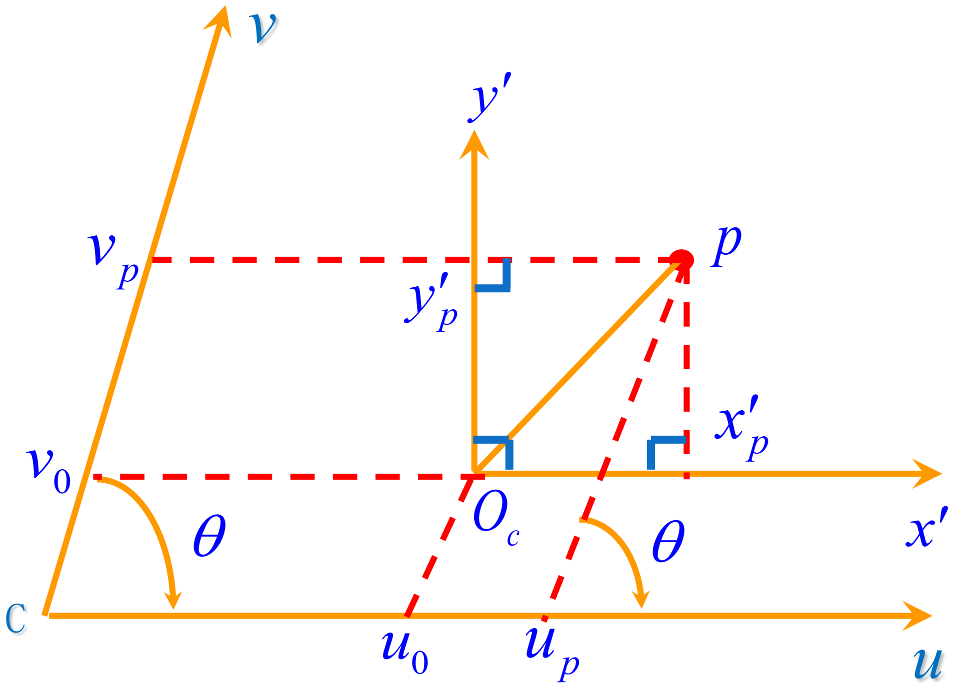
$$\begin{cases} u_p = \dfrac{x'_p}{dx} + u_0 \\ v_p = \dfrac{y'_p}{dy} + v_0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

像机坐标系与图像坐标系的一般化形式

- 实际CCD/CMOS传感器u轴和v轴可能会不垂直
- 图像坐标系 u-c-v， u轴v轴夹角为θ
- 像机坐标系在图像平面的投影 x'-O_c-y'

$$\begin{cases} u_p = \dfrac{x'_p - y'_p \cot\theta}{dx} + u_0 \\ v_p = \dfrac{y'_p / \sin\theta}{dy} + v_0 \end{cases}$$



像机坐标系与图像坐标系的一般化形式

$$\begin{cases} u_p = \dfrac{x'_p - y'_p \cot\theta}{dx} + u_0 \\ v_p = \dfrac{y'_p / \sin\theta}{dy} + v_0 \end{cases}$$

⬇ 奇次坐标形式

$$\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & -\cot\theta/dx & u_0 \\ 0 & 1/(dy\cdot\sin\theta) & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

世界坐标系到图像坐标系

$$\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_p \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc:c} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_p \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

像机内参和外参

$$z_p\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc:c} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times1}^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f_x = f/dx$$
$$f_y = f/dy$$

$$z_p\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times1}^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

像机内参和外参

像机内部参数（内参）　　像机外部参数（外参）

$$z_p\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\left[\begin{array}{ccc:c} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]} \boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times1}^T & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

像机内参和外参：一般化形式

$$z_p\begin{bmatrix}u_p\\v_p\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/dx & -\cot\theta/dx & u_0\\0 & 1/(dy\cdot\sin\theta) & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc:c}f & 0 & 0 & 0\\0 & f & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1}\\\mathbf{0}_{3\times1}^T & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_p\\Y_p\\Z_p\\1\end{bmatrix}$$

$$f_x=f/dx$$

$$f_y=f/(\sin\theta\cdot dy)$$

$$\gamma=-f\cot\theta/dx$$

$$z_p\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:c}f_x & \gamma & u_0 & 0\\0 & f_y & v_0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1}\\\mathbf{0}_{3\times1}^T & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\\1\end{bmatrix}$$

像机内参和外参：一般化形式

像机内部参数（内参）　　像机外部参数（外参）

$$z_p \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\left[\begin{array}{ccc:c} f_x & \gamma & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]} \boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times 3} & \mathbf{T}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{3\times 1}^T & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

γ表示u轴和v轴的不垂直因子。

像机内参和外参说明

- 像机内参
  - f_x： u轴尺度因子，或称u轴归一化焦距
  - f_y： v轴尺度因子，或称v轴归一化焦距
  - γ ： u轴和v轴的不垂直因子，通常为0
  - u_0, v_0： 光学中心
- 像机外参
  - **R**: 像机旋转矩阵
  - **T**： 像机平移矩阵

第二讲 图像采集

2.4 像机标定

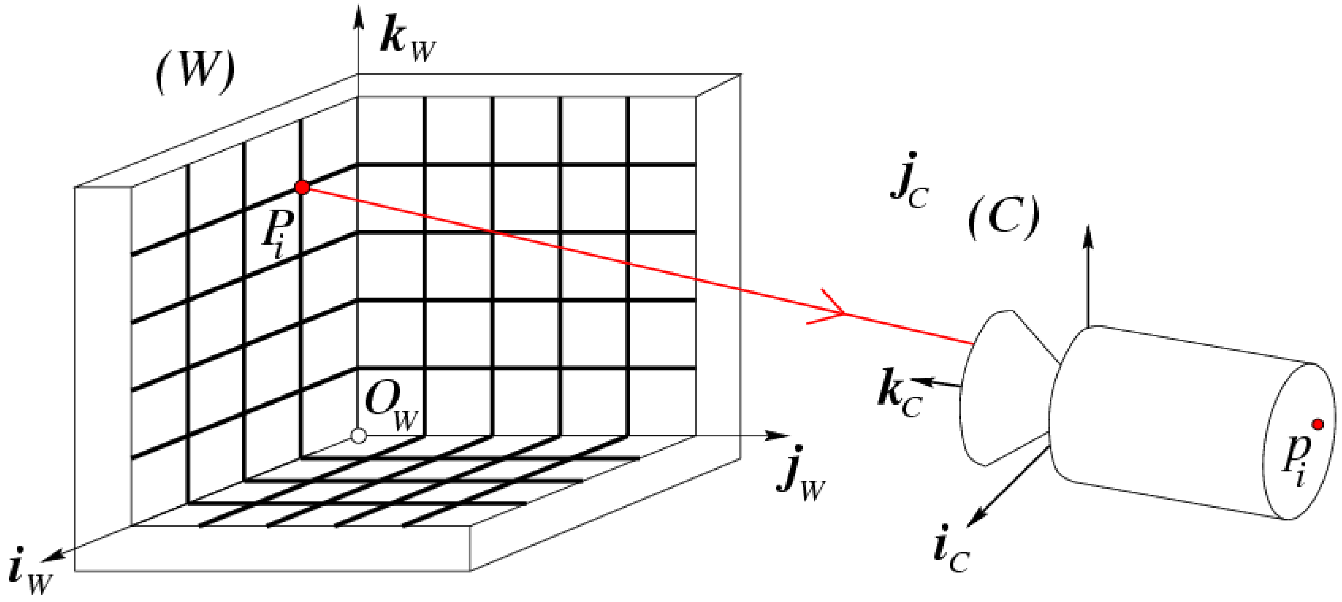
像机标定问题

- 目的：确定像机的内参和外参。

$$z_p\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} f_x & \gamma & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times 3} & \mathbf{T}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{3\times 1}^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 思路：通过一组已知世界坐标的图像特征点，建立 超定方程求解。
- 方法：最小二乘求解超定方程，寻找最优估计。

像机标定问题



- 给定n个世界坐标已知的场景点P_i, $i \in [1,n]$，并已知它们投影在图像上的投影点坐标。
- 建立超定方程组，并最优求解。

像机参数自由度分析

$$
z_p \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} f_x & \gamma & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\text{内参}} \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times1}^T & 1 \end{bmatrix}}^{\text{外参}} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}
$$

5自由度　　6自由度

至少需要多少个已知场景点才能估计出像机参数?

第二讲 图像采集

2.4.1 线性模型像机标定

线性模型像机标定

- 直接线性变换（DLT变换）：求解投影矩阵
- 投影矩阵

$$\mathbf{M}_{3\times4}=\begin{bmatrix} m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} & m'_{14} \\ m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} & m'_{24} \\ m'_{31} & m'_{32} & m'_{33} & m'_{34} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:c} \alpha_x & \gamma & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1} \\ \mathbf{0}^T_{3\times1} & 1 \end{bmatrix}$$

- 线性模型的齐次方程表示

$$z_p\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}=\mathbf{M}_{3\times4}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性模型像机标定：投影矩阵

$$z_p\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

m_{34}转为尺度因子 ⇓ 11个自由度

$$z'_p\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix};\ \text{其中}\quad z'_p=\frac{z_p}{m_{34}},\quad m_{ij}=\frac{m'_{ij}}{m_{34}}$$

线性模型像机标定

- 已知场景点P的世界坐标为(X_i, Y_i, Z_i), 其在图像上投影点坐标为(u_i, v_i).

$$\begin{cases} z_i' u_i = m_{11} X_i + m_{12} Y_i + m_{13} Z_i + m_{14} \\ z_i' v_i = m_{21} X_i + m_{22} Y_i + m_{23} Z_i + m_{24} \\ z_i' = m_{31} X_i + m_{32} Y_i + m_{33} Z_i + 1 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{消除} z'_i$$

$$\begin{cases} m_{11} X_i + m_{12} Y_i + m_{13} Z_i + m_{14} - u_i m_{31} X_i - u_i m_{32} Y_i - u_i m_{33} Z_i = u_i \\ m_{21} X_i + m_{22} Y_i + m_{23} Z_i + m_{24} - v_i m_{31} X_i - v_i m_{32} Y_i - v_i m_{33} Z_i = v_i \end{cases}$$

线性模型像机标定

$$\begin{cases} m_{11}X_i + m_{12}Y_i + m_{13}Z_i + m_{14} - u_i m_{31}X_i - u_i m_{32}Y_i - u_i m_{33}Z_i = u_i \\ m_{21}X_i + m_{22}Y_i + m_{23}Z_i + m_{24} - v_i m_{31}X_i - v_i m_{32}Y_i - v_i m_{33}Z_i = v_i \end{cases}$$

$$\big\Downarrow \text{矩阵形式表示}$$

$$\begin{bmatrix} X_i & Y_i & Z_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_iX_i & -u_iY_i & -u_iZ_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & Z_i & 1 & -v_iX_i & -v_iY_i & -v_iZ_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \\ m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

线性模型像机标定：n个已知场景点

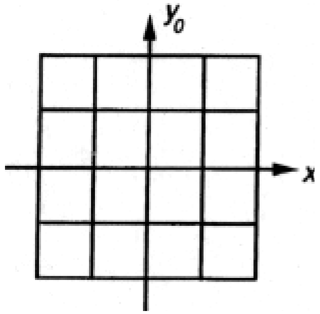
求解超定线性方程组

$$
\begin{bmatrix}
X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1X_1 & -u_1Y_1 & -u_1Z_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -v_1X_1 & -v_1Y_1 & -v_1Z_1 \\
\cdots \\
X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_nX_n & -u_nY_n & -u_nZ_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & 1 & -v_nX_n & -v_nY_n & -v_nZ_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \\ m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
u_1 \\ v_1 \\ \cdots \\ u_n \\ v_n
\end{bmatrix}
$$

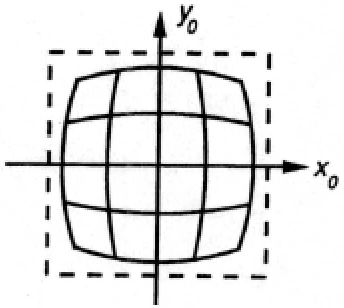
第二讲 图像采集

2.4.1 非线性模型像机标定

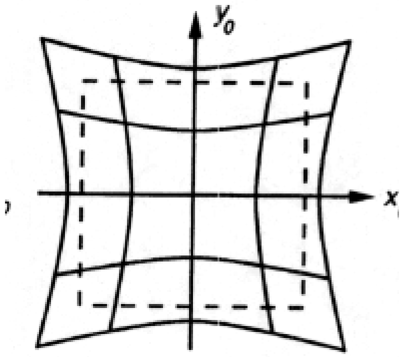
镜头畸变



无畸变

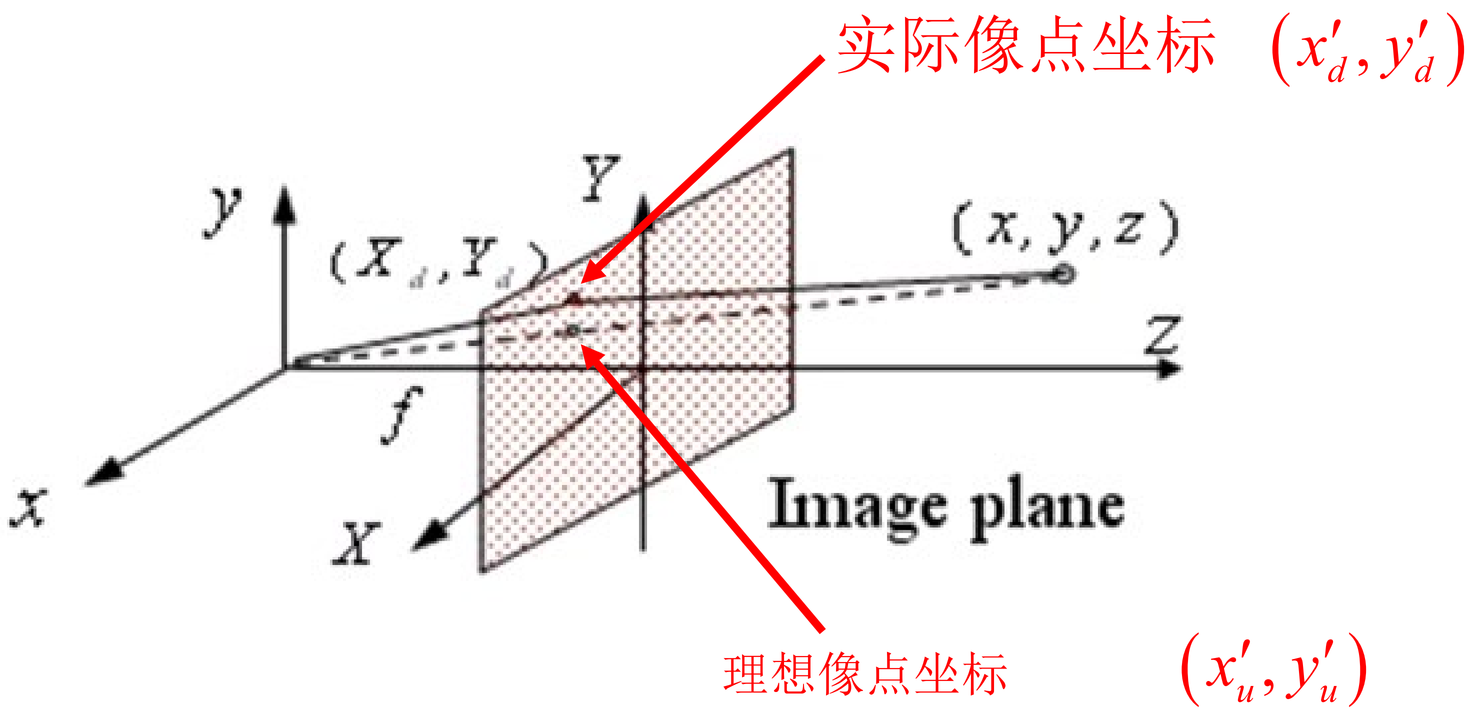


桶形畸变



枕形畸变

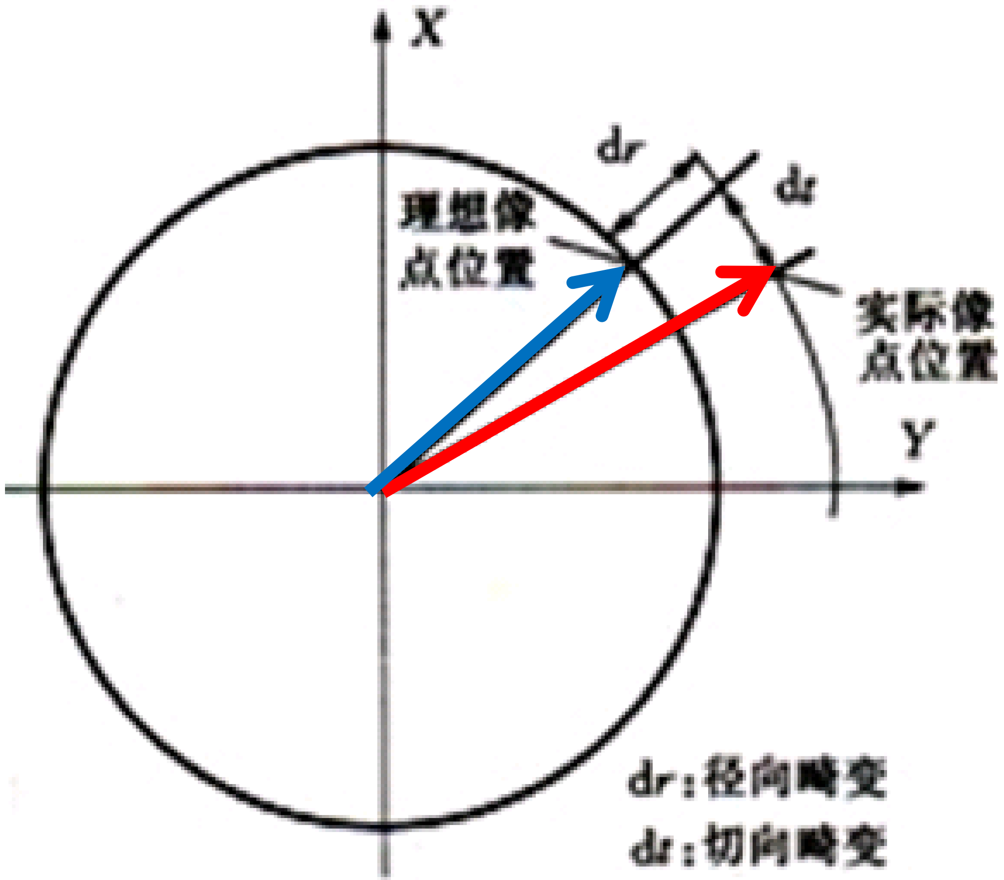
镜头畸变



$$\begin{cases} x_u' = x_d' + \delta_x \\ y_u' = y_d' + \delta_y \end{cases}$$

δ_x, δ_y 为非线性畸变值

径向畸变和切向畸变



- 将图像坐标转为极坐标表示。
- dr为极坐标的幅度变化量，表现为径向畸变。
- dt为极坐标的角度变化量，表现为切向畸变。
- 在大多数视觉应用中切向畸变通常很小，因此可忽略。

径向畸变

- 径向畸变的修正量由距图像中心(u_0,v_0)的径向距离的偶次幂多项式模型来表示。

$$\begin{cases} \delta_x = x'_d\left(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \ldots\right) \\ \delta_y = y'_d\left(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \ldots\right) \end{cases}$$

- 其中

$$r^2 = \left(x'_d\right)^2 + \left(y'_d\right)^2$$

- 对一般视觉应用，只需考虑一阶径向畸变

$$\begin{cases} \delta_x = x'_d k_1 r^2 \\ \delta_y = y'_d k_1 r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_u = x'_d\left(1 + k_1 r^2\right) \\ y'_u = y'_d\left(1 + k_1 r^2\right) \end{cases}$$

像机非线性模型的参数

- **内部参数**
  - 线性模型参数 α_x，α_y，u_0，v_0
  - 非线性模型参数 k_1，k_2
- **外部参数**
  - 旋转矩阵 $\mathbf{R}$
  - 平移矩阵 $\mathbf{T} = (t_x, t_y, t_z)'$

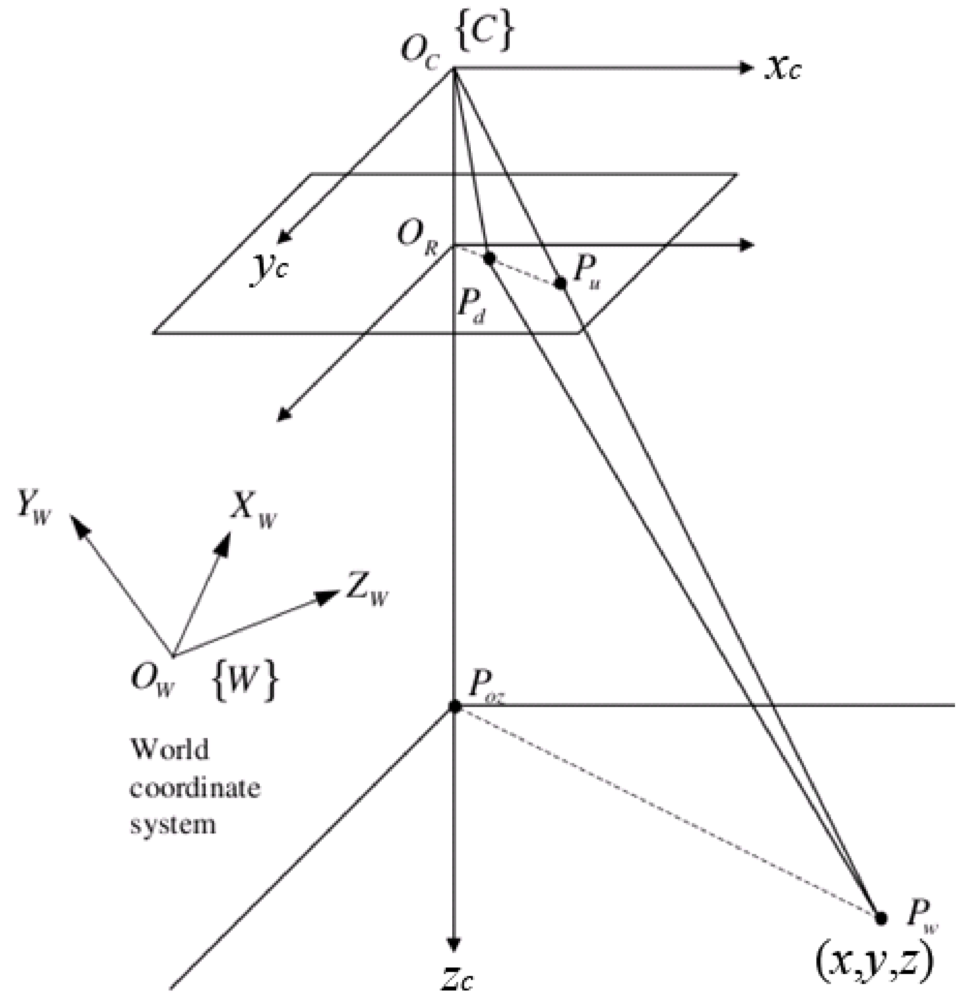
基于径向约束的像机标定

- Roger Tsai 1987年提出基于径向约束的两步法标定
  - 第一步：利用径向一致性约束，求解旋转矩阵**R**，平移矩阵**T**的t_x，t_y分量及尺度因子s_x
  - 第二步：求解焦距f，平移矩阵**T**的t_z分量和径向畸变参数k_1（只考虑一阶径向畸变）

径向排列约束RAC（Radial Alignment Constraint）

- 像机坐标系下：
  - 实际像点P_d坐标 (x'_d, y'_d)
  - 理想像点P_u坐标 (x'_u, y'_u)
- 实际像点P_d图像坐标(u_d,v_d)
- 径向畸变不改变方向，即O_R-P_d-P_u共线。
- RAC约束： $O_R P_d // P_{oz} P_w$

$$\frac{x'_d}{y'_d} = \frac{x'_u}{y'_u} = \frac{x}{y}$$



图像坐标与传感器坐标转换

$$\begin{bmatrix} u_d \\ v_d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_d \\ y'_d \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_d - u_0 \\ v_d - v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 \\ 0 & 1/dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_d \\ y'_d \end{bmatrix}$$

dx，dy为像素在x'和y'方向的物理尺寸

dx，dy如何获得？

传感器输出的

1）图像像素水平间距（水平采样）与传感单元水平间距通常无直接关联；

2）图像像素垂直方向采样受传感单元垂直间距限制；

3）像素水平尺寸和垂直尺寸比例（图像像素尺度因子或称纵横比）未知

图像坐标与传感器坐标转换

$dx = d_x N_{cx} / f_{cx}$

d_x　x方向（扫描线方向）相邻传感单元中心间距

N_{cx}　x方向传感单元的个数

f_{cx}　x方向的图像像素个数

$dy = d_y$

d_y　y方向（扫描线方向）相邻传感单元中心间距

s_x　图像像素尺度因子或称纵横比

$$\begin{bmatrix} u_d - u_0 \\ v_d - v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x/dx & 0 \\ 0 & 1/dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_d \\ y'_d \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{x'_d}{y'_d} = \frac{1}{\boxed{s_x}} \frac{(u-u_0) d_x N_{cx}/f_{cx}}{(v-v_0) d_y} \xrightarrow[\text{令} y''_d = (v-v_0) d_y]{\text{令} x''_d = (u-u_0) d_x N_{cx}/f_{cx}} \frac{1}{\boxed{s_x}} \frac{x''_d}{y''_d}$$

仅一个未知量，需标定获得

径向排列约束（RAC）

由像机坐标系与世界坐标系间的关系式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = r_{11}X_w + r_{12}Y_w + r_{13}Z_w + t_x \\ y = r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + t_y \\ z = r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_z \end{cases}$$

根据RAC约束，有

$$\frac{x'_d}{y'_d} = \frac{x}{y} = \frac{r_{11}X_w + r_{12}Y_w + r_{13}Z_w + t_x}{r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + t_y}$$

即：

$$\frac{x''_d}{y''_d} = \frac{s_x r_{11}X_w + s_x r_{12}Y_w + s_x r_{13}Z_w + s_x t_x}{r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + t_y}$$

径向排列约束（RAC）

$$\frac{x''_d}{y''_d} = \frac{s_x r_{11} X_w + s_x r_{12} Y_w + s_x r_{13} Z_w + s_x t_x}{r_{21} X_w + r_{22} Y_w + r_{23} Z_w + t_y}$$

$$\boxed{s_x r_{11} X_w y''_d + s_x r_{12} Y_w y''_d + s_x r_{13} Z_w y''_d + s_x t_x y''_d - r_{21} X_w x''_d - r_{22} Y_w x''_d - r_{23} Z_w x''_d = t_y x''_d}$$

矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} X_w y''_d & Y_w y''_d & Z_w y''_d & y''_d & -X_w x''_d & -Y_w x''_d & -Z_w x''_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x r_{11}/t_y \\ s_x r_{12}/t_y \\ s_x r_{13}/t_y \\ s_x t_x/t_y \\ r_{21}/t_y \\ r_{22}/t_y \\ r_{23}/t_y \end{bmatrix} = x''_d$$

径向排列约束（RAC）

- 令 $a_1 = s_x r_{11}/t_y$； $a_2 = s_x r_{12}/t_y$； $a_3 = s_x r_{13}/t_y$； $a_4 = s_x t_x/t_y$
  $a_5 = r_{21}/t_y$； $a_6 = r_{22}/t_y$； $a_7 = r_{23}/t_y$

- 基于RAC约束的参数求解方程简写为：

$$\begin{bmatrix} X_w y_d'' & Y_w y_d'' & Z_w y_d'' & y_d'' & -X_w x_d'' & -Y_w x_d'' & -Z_w x_d'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = x_d''$$

基于RAC的像机标定：第一步

- 利用径向一致性约束，求解旋转矩阵**R**，平移矩阵**T**的t_x，t_y分量及尺度因子s_x

具体步骤：

- 1) 令光心坐标 (u_0,v_0)为图像中心
- 2) 根据第i个标定像素点(u_{di},v_{di}) 计算（x''_{di}，y''_{di}）

$$x''_d = (u - u_0) d_x N_{cx} / f_{cx}$$
$$y''_d = (v - v_0) d_y$$

基于RAC的像机标定：第一步

- 3) 根据其世界坐标(X_i, Y_i, Z_i), 列超定方程组，求解$a_1 \sim a_7$

$$
\begin{bmatrix}
X_0 y''_{d0} & Y_0 y''_{d0} & Z_0 y''_{d0} & y''_{d0} & -X_0 x''_{d0} & -Y_0 x''_{d0} & -Z_0 x''_{d0} \\
 & & & & & & \\
X & & & & & & \\
\cdots & & & & & & \\
X_n y''_{dn} & Y_n y''_{dn} & Z_n y''_{dn} & y''_{dn} & -X_n x''_{dn} & -Y_n x''_{dn} & -Z_n x''_{dn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1 \\ a_2 \\ \\ \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
x''_{d0} \\ \cdots \\ x''_{di} \\ \cdots \\ x''_{dn}
\end{bmatrix}
$$

问题：至少需要多少个已知场景点？

基于RAC的像机标定：第一步

- 4) 计算 $$\left|t_y\right| = \left(a_5^2 + a_6^2 + a_7^2\right)^{-1/2}$$
- 推导：

$$\left(a_5^2 + a_6^2 + a_7^2\right)^{-1/2} = \left(\left(r_{21}/t_y\right)^2 + \left(r_{22}/t_y\right)^2 + \left(r_{23}/t_y\right)^2\right)^{-1/2}$$

$$= \left|t_y\right| \cdot \left(r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2\right)^{-1/2}$$

根据旋转矩阵**R**正交性约束 $r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 = 1$

即得证

基于RAC的像机标定：第一步

- 5) 计算 $$s_x = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{1/2} \left|t_y\right|$$

- 推导：

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{1/2} = \left(\left(s_x r_{11}/t_y\right)^2 + \left(s_x r_{12}/t_y\right)^2 + \left(s_x r_{13}/t_y\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\left(s_x/t_y\right)^2 \cdot \left(r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2\right)\right)^{1/2} = s_x/\left|t_y\right|$$

基于RAC的像机标定：第一步

- 6) 先假设 t_y 符号为正，计算 r_{11}~r_{23} 和 t_x

$$r_{11} = a_1 \cdot t_y / s_x = \left(s_x r_{11} / t_y\right) \cdot t_y / s_x$$

$$r_{12} = a_2 \cdot t_y / s_x = \left(s_x r_{12} / t_y\right) \cdot t_y / s_x$$

$$r_{13} = a_3 \cdot t_y / s_x = \left(s_x r_{13} / t_y\right) \cdot t_y / s_x$$

$$r_{21} = a_5 \cdot t_y = \left(r_{21} / t_y\right) \cdot t_y$$

$$r_{22} = a_6 \cdot t_y = \left(r_{22} / t_y\right) \cdot t_y$$

$$r_{23} = a_7 \cdot t_y = \left(r_{23} / t_y\right) \cdot t_y$$

$$t_x = a_4 \cdot t_y / s_x = \left(s_x t_x / t_y\right) \cdot t_y / s_x$$

基于RAC的像机标定：第一步

- 7) 确定 t_y 符号

- 取任意一个标定点世界坐标(X_i, Y_i, Z_i)，则可计算出其在像机坐标系下的坐标

$$x_i = r_{11}X_i + r_{12}Y_i + r_{13}Z_i + t_x \qquad y_i = r_{21}X_i + r_{22}Y_i + r_{23}Z_i + t_y$$

- 根据对应图像投影点坐标(u_i, v_i)，则可计算图像投影点在像机坐标系下的坐标

$$x'_{di} = s_x^{-1}(u_i - u_0)d_x N_{cx}/f_{cx} \qquad y'_{di} = (v_i - v_0)d_y$$

- 实际像机系统中x'_{di}与x_i同号；y'_{di}与y_i也为同号。若上述计算结果不满足同号约束，则 t_y 取负号。

基于RAC的像机标定：第一步

- 8) 根据旋转矩阵**R**的正交性，计算r_{31}, r_{32}, r_{33}

$$\begin{bmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$r_{31} = r_{12}r_{23} - r_{13}r_{22}$$
$$r_{32} = r_{13}r_{21} - r_{11}r_{23}$$
$$r_{33} = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}$$

基于RAC的像机标定：第二步

- 根据已求解的旋转矩阵**R**，平移矩阵**T**的t_x，t_y分量及尺度因子s_x，求解焦距 f，平移矩阵**T**的t_z分量和径向畸变参数 k_1。

- 带径向畸变参数 k_1的成像公式

$$
\begin{cases}
x'_{ui} = f\dfrac{x_i}{z_i} = f\dfrac{r_{11}X_i + r_{12}Y_i + r_{13}Z_i + t_x}{r_{31}X_i + r_{32}Y_i + r_{33}Z_i + t_z} \\
y'_{ui} = f\dfrac{y_i}{z_i} = f\dfrac{r_{21}X_i + r_{22}Y_i + r_{23}Z_i + t_y}{r_{31}X_i + r_{32}Y_i + r_{33}Z_i + t_z}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
x'_{ui} = x'_{di}\left(1 + k_1 r_i^2\right) \\
y'_{ui} = y'_{di}\left(1 + k_1 r_i^2\right)
\end{cases}
$$

基于RAC的像机标定：第二步

- 推导带径向畸变参数 k_1 的成像公式（续）

$$\begin{cases} x'_d + x'_d k_1 \left({x'_d}^2 + {y'_d}^2 \right) = f \dfrac{r_{11} X_i + r_{12} Y_i + r_{13} Z_i + t_x}{r_{31} X_i + r_{32} Y_i + r_{33} Z_i + t_z} \\ y'_d + y'_d k \end{cases}$$

未知量： f， t_z和 k_1

$$\begin{cases} x'_{di} = s_x^{-1} \left(u_i - u_0 \right) d_x N_{cx} / f_{cx} \\ y'_{di} = \left(v_i - v_0 \right) d_y \end{cases}$$

基于RAC的像机标定：第二步

- 具体步骤：
- 1) 不考虑畸变，即k_1=0，列超定方程组

$$y'_d=(v_i-v_0)d_y=f\frac{r_{21}X_i+r_{22}Y_i+r_{23}Z_i+t_y}{r_{31}X_i+r_{32}Y_i+r_{33}Z_i+t_z}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \\ r_{21}X_i+r_{22}Y_i+r_{23}Z_i+t_y & -(v_i-v_0)d_y \\ \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ t_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \vdots \\ (v_i-v_0)d_y(r_{31}X_i+r_{32}Y_i+r_{33}Z_i) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

采用线性最小二乘求解 f 和 t_z

基于RAC的像机标定：第二步

- 2) 估计f、t_z和k_1真实值
  - 将k_1=0时得到的f和 t_z作为非线性优化的初始值，采用采用非线性优化方法，解下列非线性方程，经优化搜索 得到f、t_z和 k_1的精确解。

$$\begin{cases} x'_d + x'_d k_1\left(x'^2_d + y'^2_d\right) = f\dfrac{r_{11}X_i + r_{12}Y_i + r_{13}Z_i + t_x}{r_{31}X_i + r_{32}Y_i + r_{33}Z_i + t_z} \\ y'_d + y'_d k_1\left(x'^2_d + y'^2_d\right) = f\dfrac{r_{21}X_i + r_{22}Y_i + r_{23}Z_i + t_y}{r_{31}X_i + r_{32}Y_i + r_{33}Z_i + t_z} \end{cases}$$

LM（Levenberg-Marquarelt）算法

第二讲 图像采集

张正友平面标定

相机投影矩阵

$$z_p\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:c}f_x & 0 & u_0 & 0\\0 & f_y & v_0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1}\\\mathbf{0}_{3\times1}^T & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\\1\end{bmatrix}$$

一般化形式

$$z_p\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:c}f_x & \gamma & u_0 & 0\\0 & f_y & v_0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1}\\\mathbf{0}_{3\times1}^T & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\\1\end{bmatrix}$$

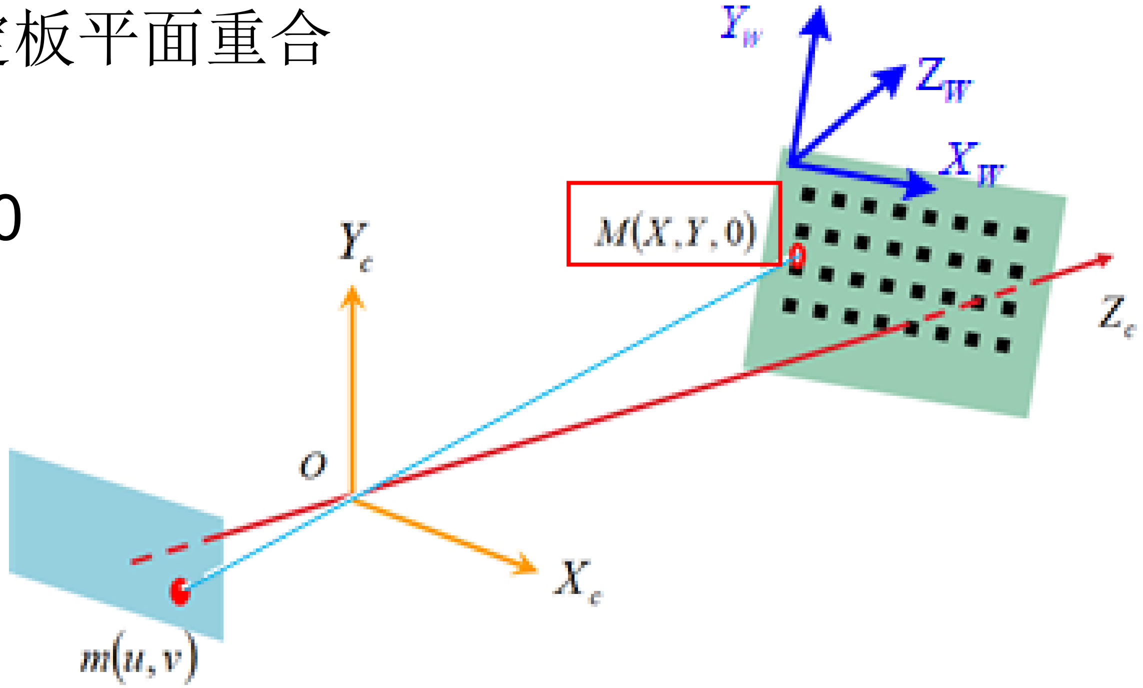
γ表示u轴和v轴的不垂直因子。

张正友平面标定思想

将世界坐标系原点位于平面标定板上（通常左上角）

世界坐标系$X_wO_wY_w$平面与标定板平面重合

标定板上的点其世界坐标$\mathbf{Z_w}$=0



相机投影矩阵

$$\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1} \\ \mathbf{0}^T_{3\times1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_p \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} f_x & \gamma & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{T}_{3\times1} \\ \mathbf{0}^T_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_p \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

相机坐标系<-->世界坐标系

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

简化

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & t_3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

新的相机投影公式

$$z_p \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} r_{11} & r_{12} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & t_3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$z_p \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\boxed{\mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{t} \end{bmatrix}}}_{\text{单应性矩阵}} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

单应性矩阵

单应性（**Homography**）：一个平面到另一个平面的投影映射

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{3\times3} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{3\times3} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一幅棋盘格平面图可以估计出一个单应性矩阵H。

单应性矩阵→内参矩阵

$$\mathbf{H}_{3\times 3} = [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3] = \lambda \mathbf{A}[\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}]$$

有 $\lambda = \dfrac{1}{z_p}$，

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_1$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_2$$

旋转矩阵性质

$$\mathbf{r}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_2 = 0$$

$$\|\mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_2\| = 1$$

$$\begin{cases} \mathbf{h}_1^T\mathbf{A}^{-T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_2 = 0 \\ \mathbf{h}_1^T\mathbf{A}^{-T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T\mathbf{A}^{-T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_2 \end{cases}$$

计算内参矩阵

- 令 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-T}\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$ B为对称阵，其有效元素为六个
- 定义 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}^T$

$$h_i^T B h_j = v_{ij}^T b$$

- 推导可得 $v_{ij}=[h_{i1}h_{j1} \quad h_{i1}h_{j2}+h_{i2}h_{j1} \quad h_{i2}h_{j2} \quad h_{i3}h_{j1}+h_{i1}h_{j3} \quad h_{i3}h_{j2}+h_{i2}h_{j3} \quad h_{i3}h_{j3}]^T$

由约束条件可得 $\begin{bmatrix} v_{12}^T \\ (v_{11}-v_{22})^T \end{bmatrix} b = 0$

一幅棋盘格平面图可以列出2个等式，至少需要三幅棋盘格平面图估计出B。

计算内参矩阵

- 一旦B被估计得到，可计算出相机内参

$$v_0 = (B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}) / (B_{11}B_{22} - B_{12}^2)$$

$$\lambda = B_{33} - [B_{13}^2 + v_0(B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})] / B_{11}$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda / B_{11}}$$

$$\beta = \sqrt{\lambda B_{11} / (B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}$$

$$\gamma = -B_{12}\alpha^2\beta / \lambda$$

$$u_0 = \gamma v_0 / \alpha - B_{13}\alpha^2 / \lambda$$

计算外参矩阵

$$r_1 = \lambda A^{-1} h_1$$

$$r_2 = \lambda A^{-1} h_2$$

$$r_3 = r_1 \times r_2$$

$$t = \lambda A^{-1} h_3$$

- 后续步骤（略）：

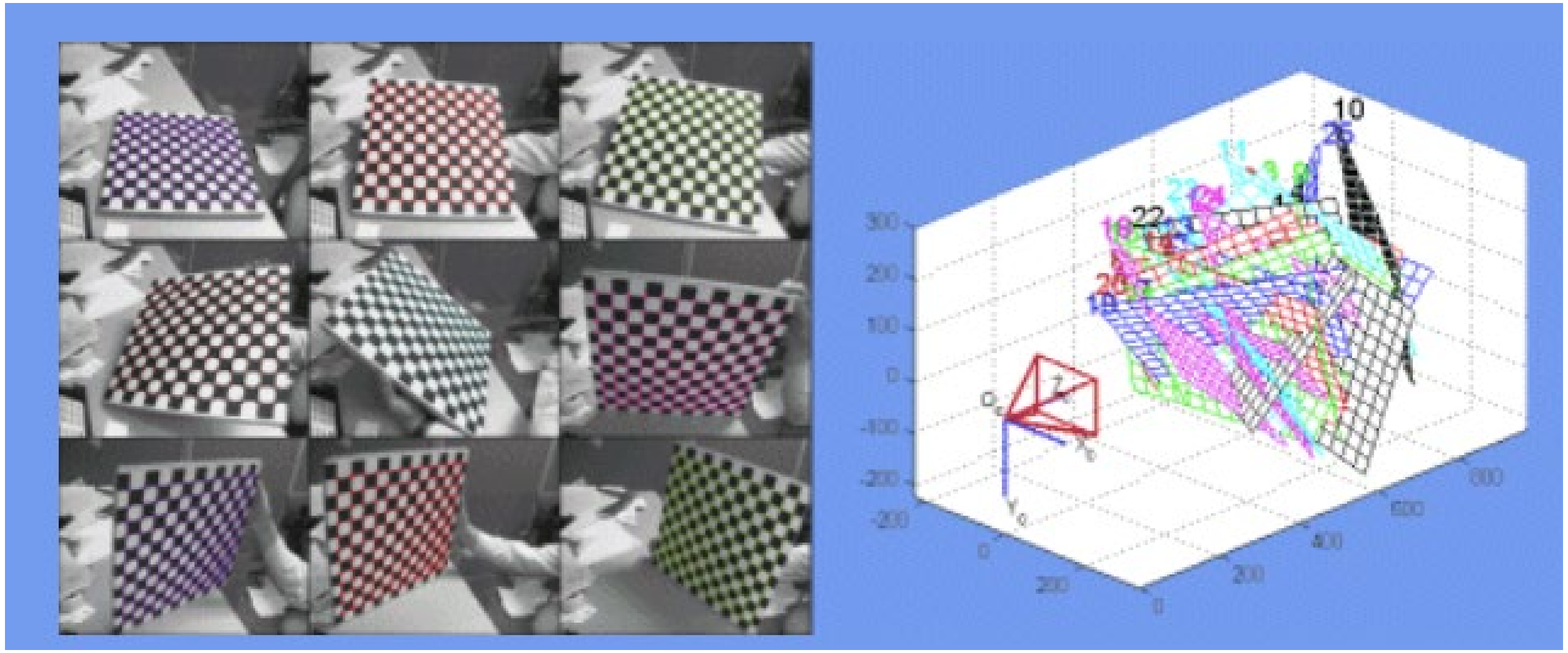
（1）最大似然估计：由于上述推导结果是基于理想情况下的解，考虑到可能存在的高斯噪声，需使用最大似然估计进行优化。

（2）径向畸变估计，类似Tasi方法

标定方法（具体见程序操作）

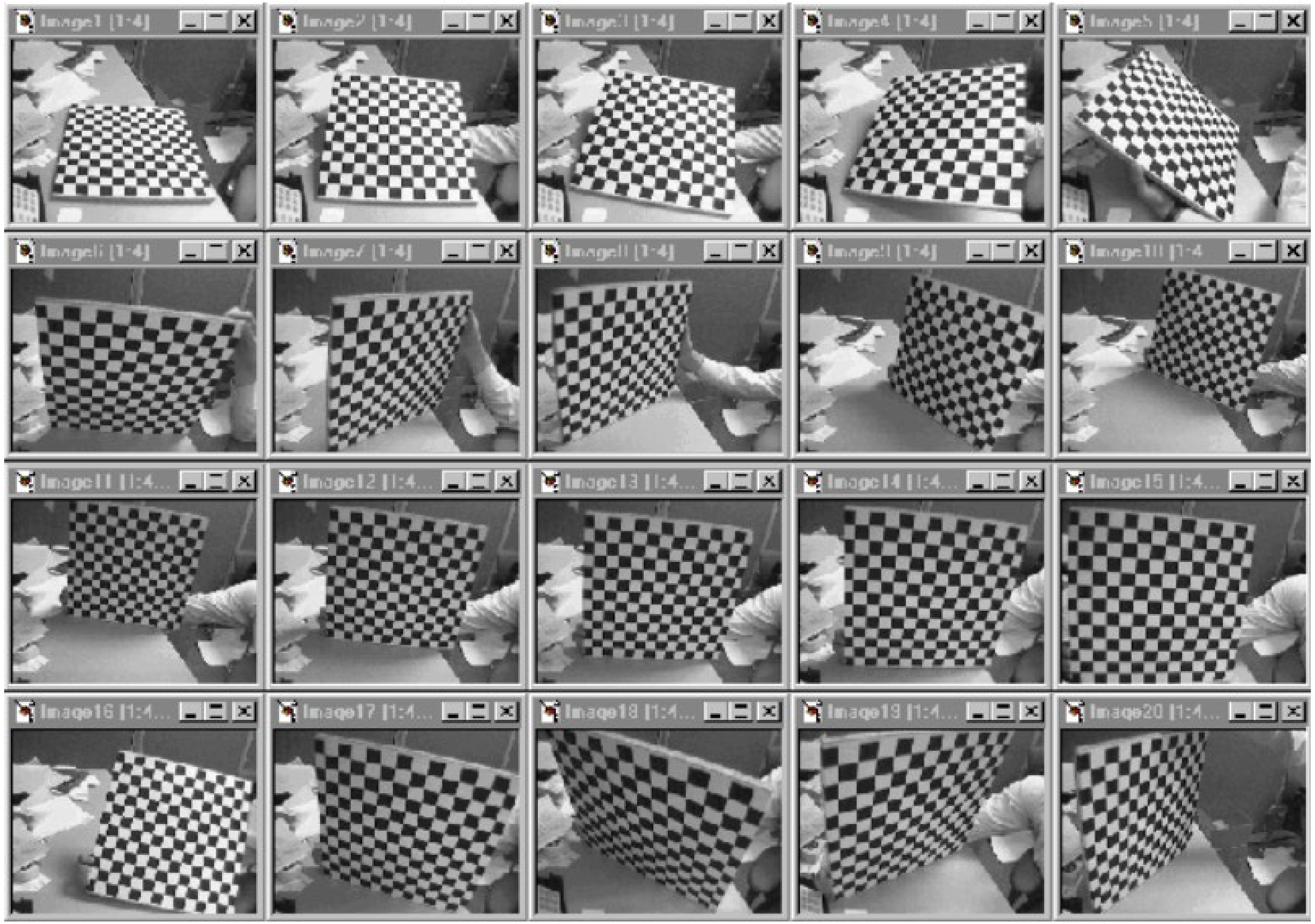
http://robots.stanford.edu/cs223b04/JeanYvesCalib/index.html#links

Camera Calibration Toolbox for Matlab



张正友标定方法

- Download the calibration images, and store the calibration images into a seperate folder named **calib_example**.



张正友标定方法

- Run the main matlab calibration function **calib_gui** (or **calib**).
  A mode selection window appears on the screen:

- let us select the standard mode by clicking on the top button of the window. The main calibration toolbox window appears on the screen (replacing the mode selection window):

张正友标定方法

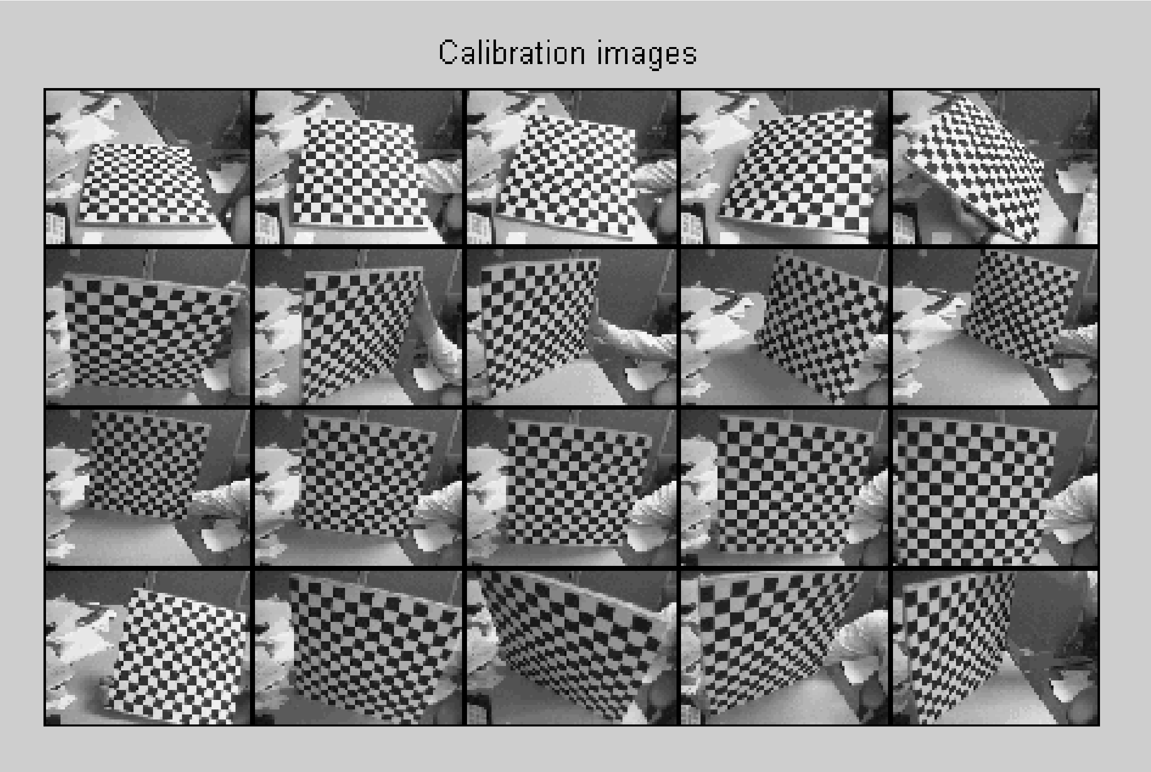
- **Reading the images:**
- Click on the **Image names** button in the **Camera calibration tool** window. Enter the basename of the calibration images (**Image**) and the image format (**tif**).

  All the images (the 20 of them) are then loaded in memory (through the command **Read images** that is automatically executed) in the variables **I_1**, **I_2** ,..., **I_20**. The number of images is stored in the variable **n_ima (=20 here)**.

The matlab window should look like this:

```
.            Image11.tif  Image15.tif  Image19.tif  Image4.tif   Image8.tif
..           Image12.tif  Image16.tif  Image2.tif   Image5.tif   Image9.tif
Image1.tif   Image13.tif  Image17.tif  Image20.tif  Image6.tif
Image10.tif  Image14.tif  Image18.tif  Image3.tif   Image7.tif


Basename camera calibration images (without number nor suffix): Image
Image format: ([]='r'='ras', 'b'='bmp', 't'='tif', 'p'='pgm', 'j'='jpg', 'm'='ppm') t
Loading image 1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...11...12...13...14...15...16...17...18...19...20...
done
```

The complete set of images is also shown in thumbnail format



张正友标定方法

- **Extract the grid corners**

Click on the **Extract grid corners** button in the **Camera calibration tool** window.

```
Extraction of the grid corners on the images
Number(s) of image(s) to process ([] = all images) =
```

Press "enter" to select all the images. Then, select the default window size of the corner finder: **wintx=winty=5** by pressing “enter” with empty arguments to the **wintx** and **winty** question. This leads to a effective window of size 11x11 pixels.

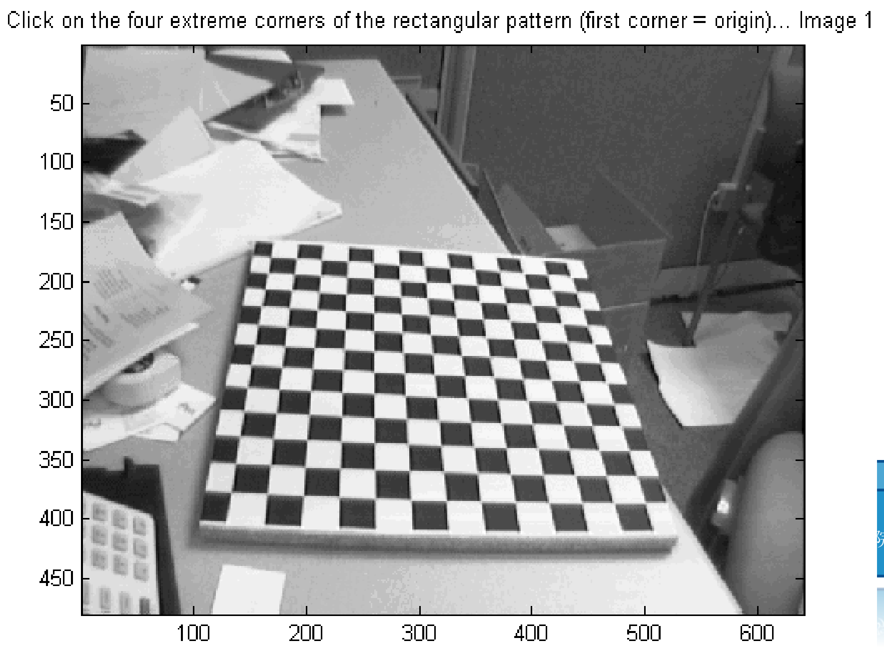
```
Extraction of the grid corners on the images
Number(s) of image(s) to process ([] = all images) =
Window size for corner finder (wintx and winty):
wintx ([] = 5) =
winty ([] = 5) =
Window size = 11x11
Do you want to use the automatic square counting mechanism (0=[]=default)
  or do you always want to enter the number of squares manually (1,other)?
```

张正友标定方法

- The corner extraction engine includes an automatic mechanism for counting the number of squares in the grid. In this present example, it is perfectly appropriate to keep working in the default mode (i.e. with automatic square counting activated), and therefore, simply press "enter" with an empty argument.

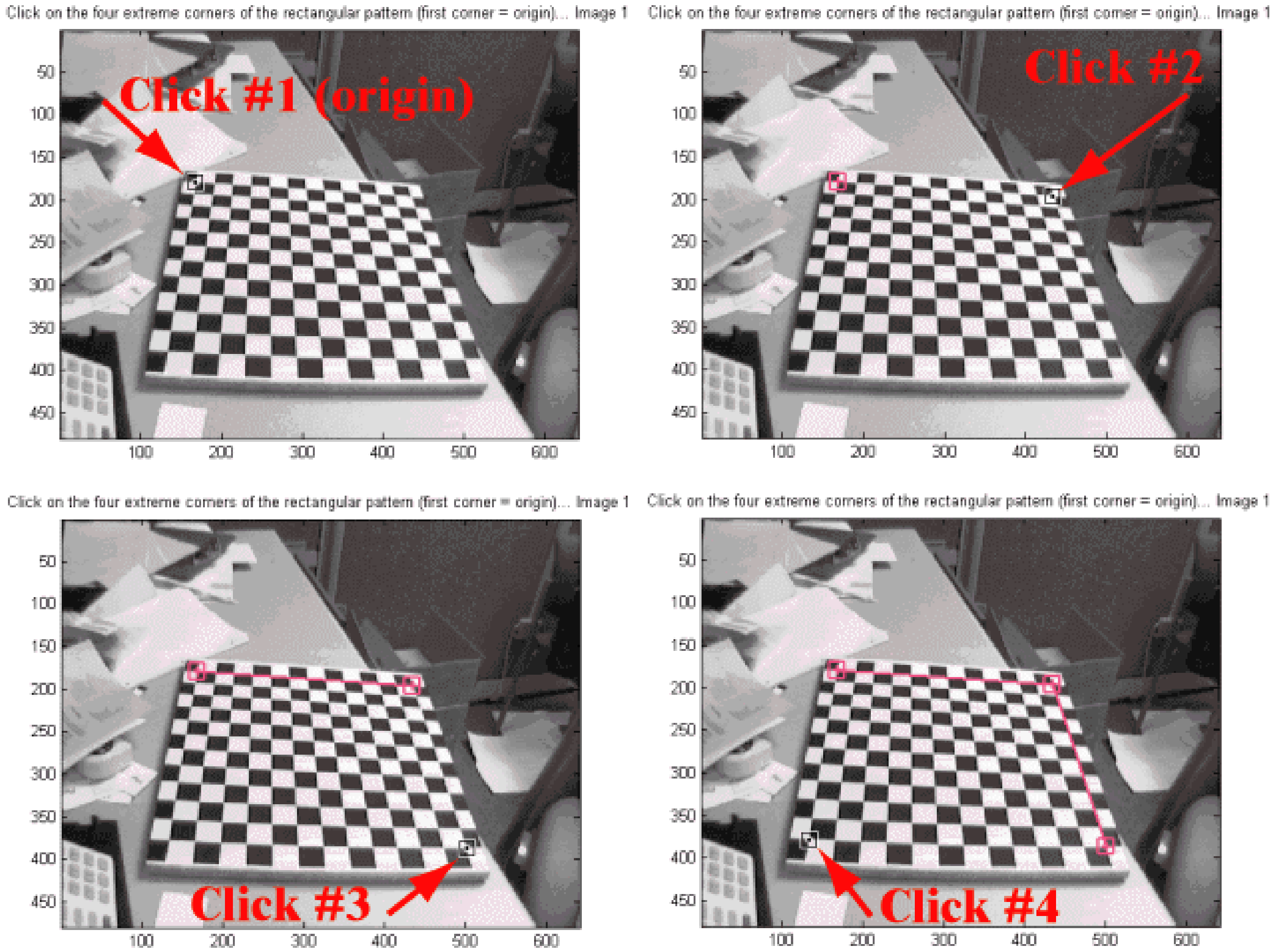
```
Do you want to use the automatic square counting mechanism (0=[]=default)
  or do you always want to enter the number of squares manually (1,other)?

Processing image 1...
Using (wintx,winty)=(5,5) - Window size = 11x11      (Note: To reset the window size, run script clearwin)
Click on the four extreme corners of the rectangular complete pattern (the first clicked corner is the origin)...
```

The first calibration image is then shown on Figure 2



张正友标定方法

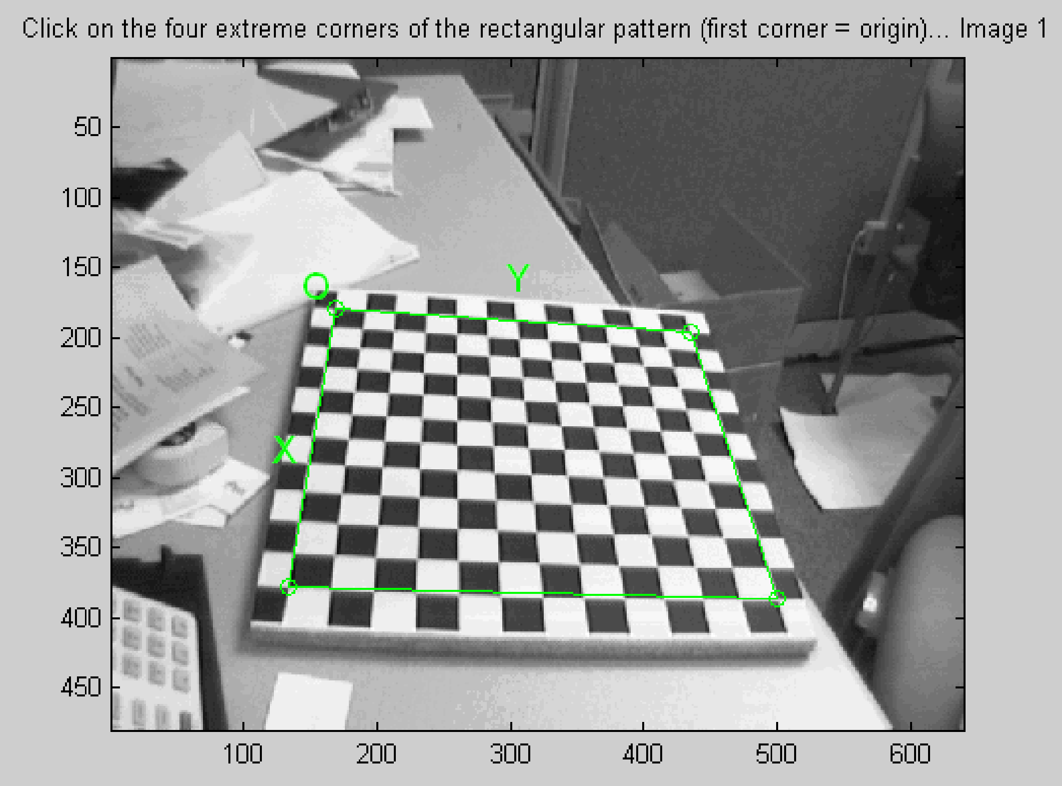
- Click on the four extreme corners on the rectangular checkerboard pattern. The clicking locations are shown on the four following figures.



Ordering rule for clicking: The first clicked point is selected to be associated to the origin point of the reference frame attached to the grid. The other three points of the rectangular grid can be clicked in any order. This first-click rule is especially important if you need to calibrate externally multiple cameras.

张正友标定方法

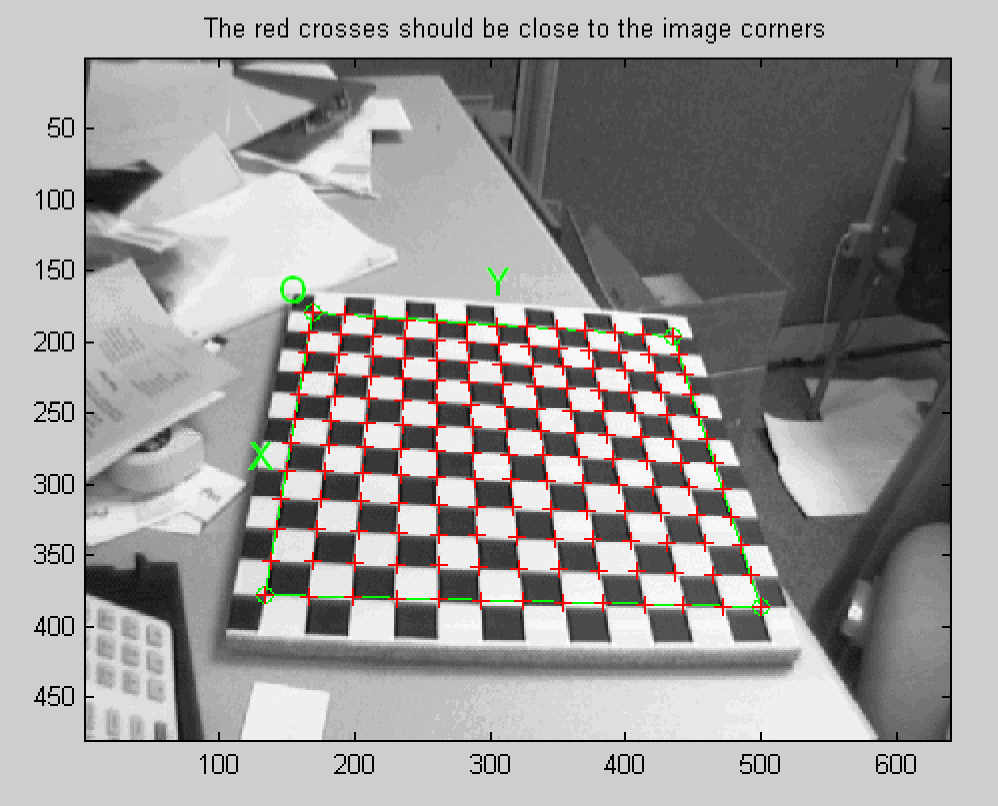
- The boundary of the calibration grid is then shown on Figure 2:



Enter the sizes **dX** and **dY** in X and Y of each square in the grid (in this case, **dX=dY=30mm**=default values):

```
Size dX of each square along the X direction ([]=30mm) = 30
Size dY of each square along the Y direction ([]=30mm) = 30
```

Note that you could have just pressed "enter" with an empty argument to select the default values. The program automatically counts the number of squares in both dimensions, and shows the predicted grid corners in absence of distortion:

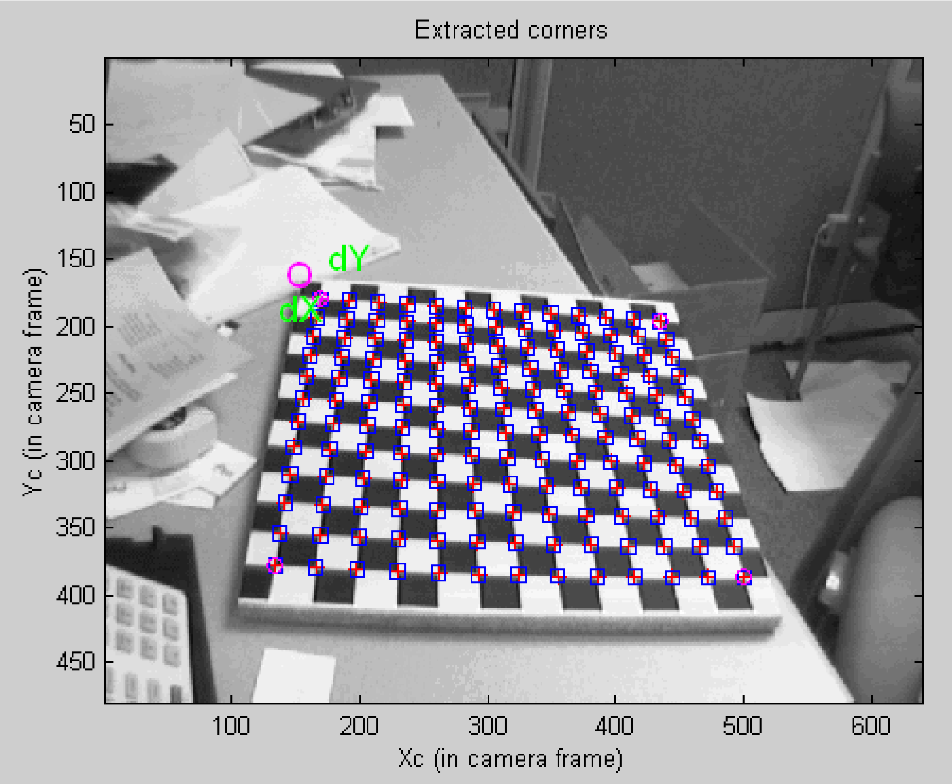


张正友标定方法

- If the predicted corners are close to the real image corners, then the following step may be skipped. Press "enter", and the corners are automatically extracted using those positions as initial guess.

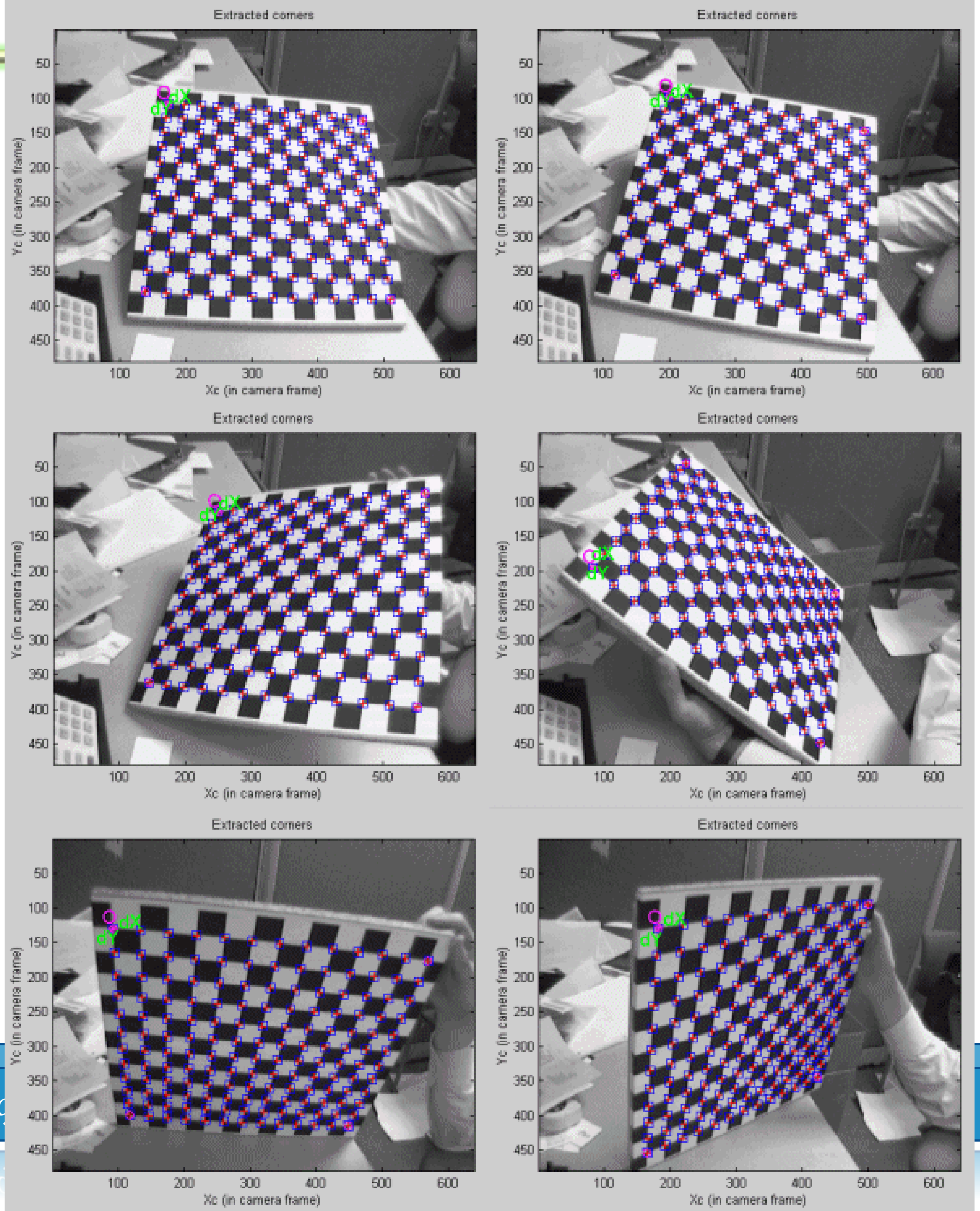
```
Corner extraction...
```

The image corners are then automatically extracted, and displayed on figure 3 (the blue squares around the corner points show the limits of the corner finder window):



张正友标定方法

- The corners are extracted to an accuracy of about 0.1 pixel. Follow the same procedure for the 2nd, 3rd, … images. For example, here are the detected corners of image 2, 3, 4, 5, 6 and 7:



张正友标定方法

- **Main Calibration step**

After corner extraction, click on the button **Calibration** of the **Camera calibration tool** to run the main camera calibration procedure.

Calibration is done in two steps: first initialization, and then nonlinear optimization.

The initialization step computes a closed-form solution for the calibration parameters based not including any lens distortion (program name: **init_calib_param.m**).

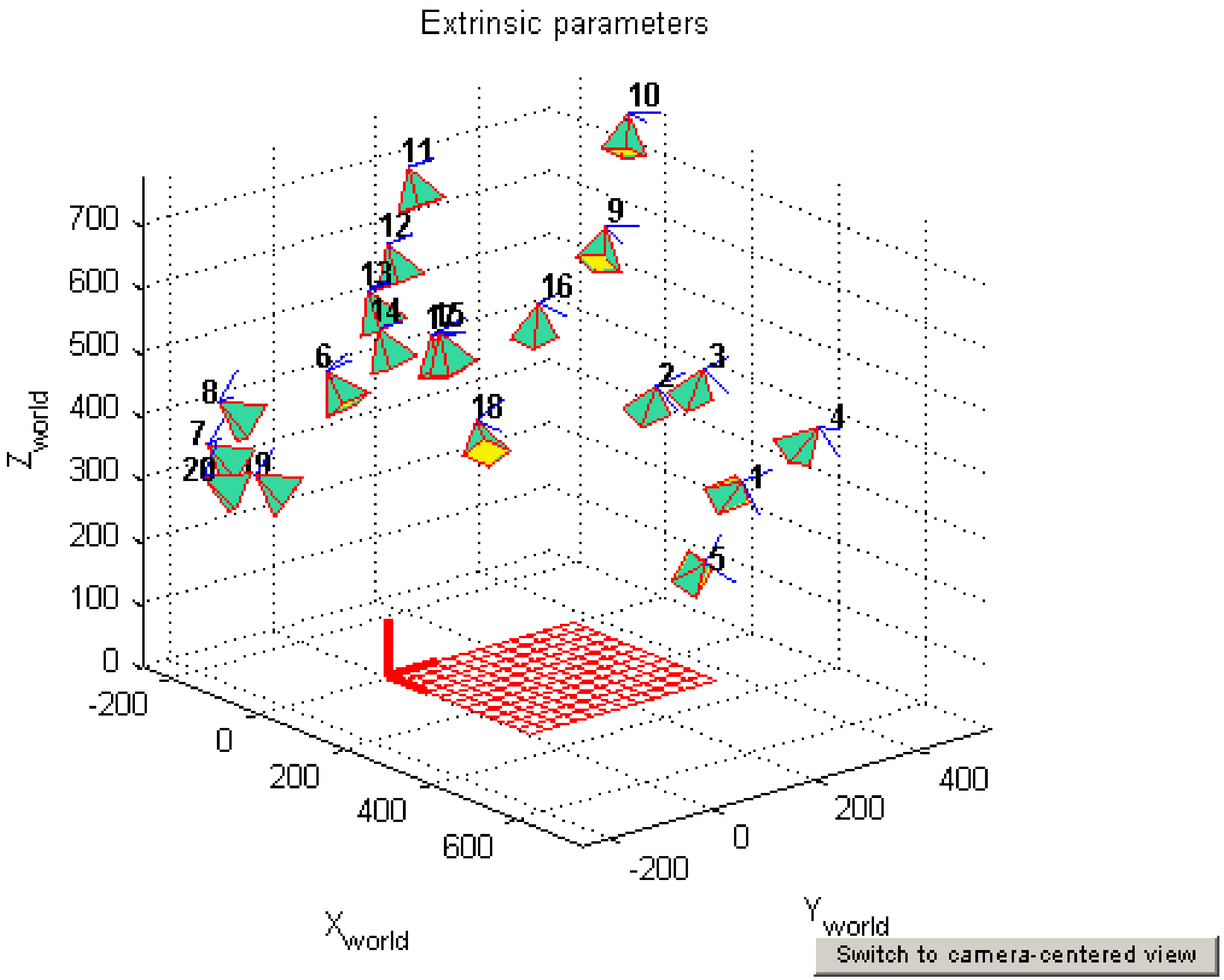
The non-linear optimization step minimizes the total reprojection error (in the least squares sense) over all the calibration parameters (9 DOF for intrinsic: focal, principal point, distortion coefficients, and 6*20 DOF extrinsic => 129 parameters).

张正友标定方法

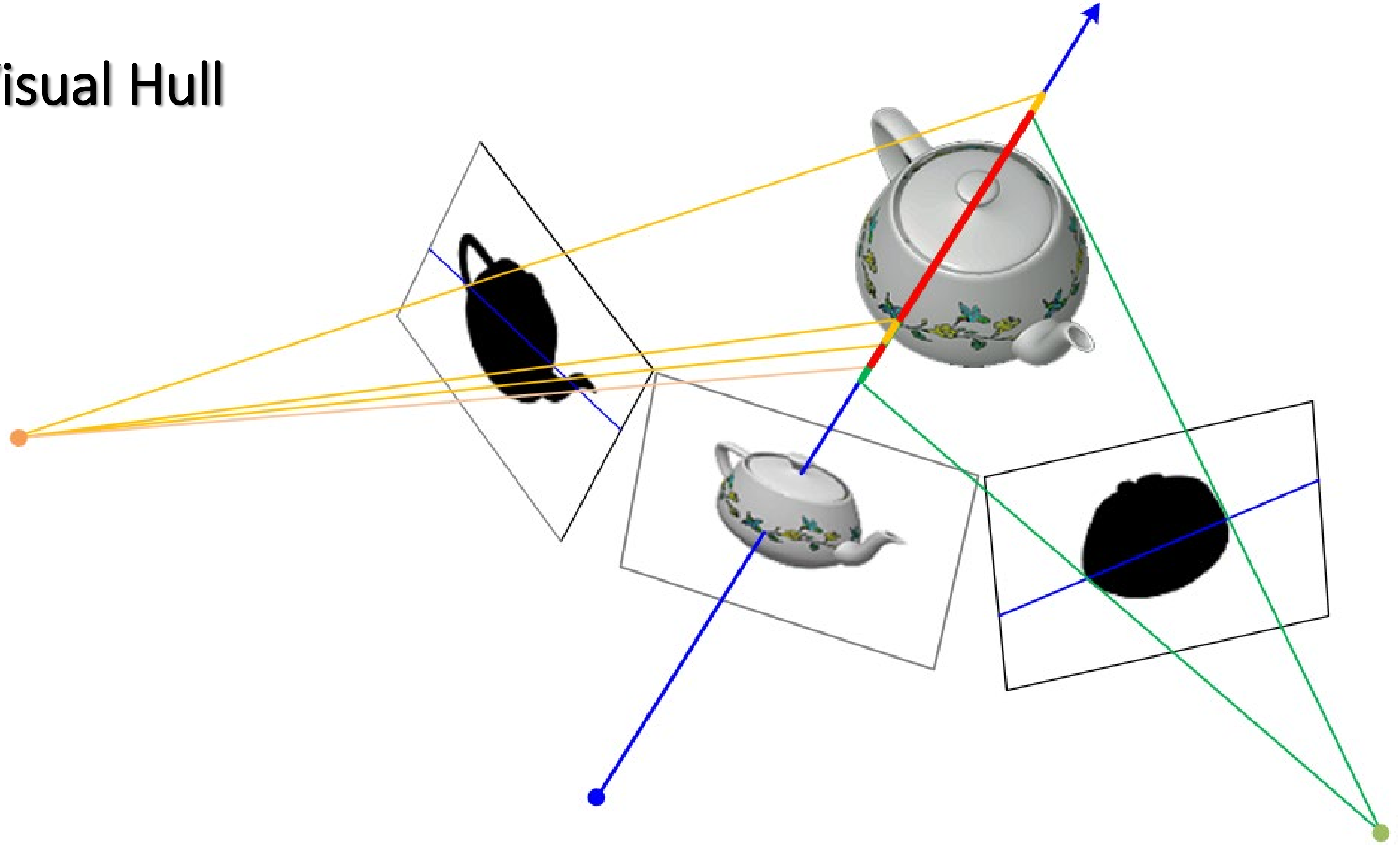
```
Aspect ratio optimized (est_aspect_ratio = 1) -> both components of fc are estimated (DEFAULT).
Principal point optimized (center_optim=1) - (DEFAULT). To reject principal point, set center_optim=0
Skew not optimized (est_alpha=0) - (DEFAULT)
Distortion not fully estimated (defined by the variable est_dist):
     Sixth order distortion not estimated (est_dist(5)=0) - (DEFAULT) .
Initialization of the principal point at the center of the image.
Initialization of the image distortion to zero.
Initialization of the intrinsic parameters using the vanishing points of planar patterns.

Initialization of the intrinsic parameters - Number of images: 20


Calibration parameters after initialization:

Focal Length:          fc = [ 671.13759   680.77186 ]
Principal point:       cc = [ 319.50000   239.50000 ]
Skew:             alpha_c = [ 0.00000 ]   => angle of pixel = 90.00000 degrees
Distortion:            kc = [ 0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000 ]

Main calibration optimization procedure - Number of images: 20
Gradient descent iterations: 1...2...3...4...5...6...7...8...9...10...11...done
Estimation of uncertainties...done


Calibration results after optimization (with uncertainties):

Focal Length:          fc = [ 661.67001   662.82858 ] ± [ 1.17913   1.26567 ]
Principal point:       cc = [ 306.09590   240.78987 ] ± [ 2.38443   2.17481 ]
Skew:             alpha_c = [ 0.00000 ] ± [ 0.00000  ]   => angle of pixel axes = 90.00000 ± 0.00000 degrees
Distortion:            kc = [ -0.26425   0.22645   0.00020   0.00023   0.00000 ] ± [ 0.00934   0.03826   0.00052   0.00053   0.00000 ]
Pixel error:          err = [ 0.45330   0.38916 ]

Note: The numerical errors are approximately three times the standard deviations (for reference).


Recommendation: Some distortion coefficients are found equal to zero (within their uncertainties).
                To reject them from the optimization set est_dist=[1;1;0;0;0] and run Calibration
```

张正友标定方法

- On this figure, every camera position and orientation is represented by a green pyramid. Another click on the **Switch to camera-centered view** button turns the figure back to the "camera-centered" plot.



相机内外参应用：Visual Hull

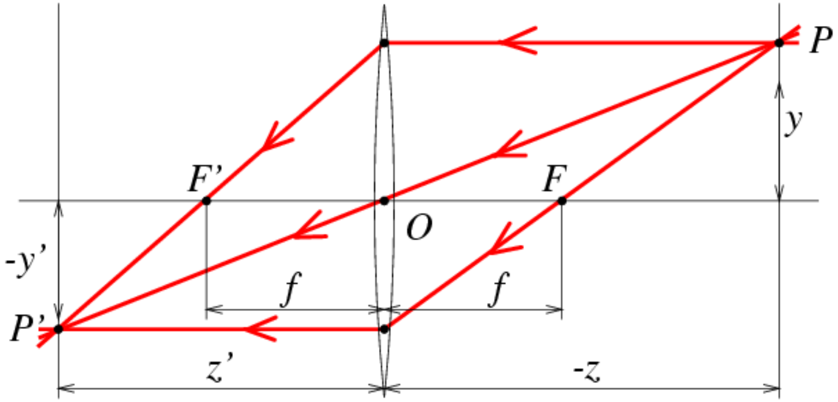


习题

第三章 图像采集

习题3.1 P55

- 用一个带50mm焦距镜头的像机拍摄距离10m外，高2m的物体，该物体成像尺寸为多少？如果换为135mm的镜头，成像尺寸为多少？



$$\begin{cases} x' = z'\dfrac{x}{z} \\ y' = z'\dfrac{y}{z} \end{cases} \quad \text{where} \quad \frac{1}{z'} + \frac{1}{z} = \frac{1}{f}$$

习题3.1 P55

- 1、已知物距 z=10m，物高 y=2m，焦距 f=50mm
- 根据 $\frac{1}{z'}+\frac{1}{z}=\frac{1}{f}$ ，有 $\frac{1}{z'}+\frac{1}{10}=\frac{1}{0.05}\Rightarrow z'\approx 0.05025\text{ m}$
- 根据 y

焦距越大，视野越小，成的像越大

- 2、已知物距 z=10m，物高 y=2m，焦距 f=135mm

$$\frac{1}{z'}+\frac{1}{10}=\frac{1}{0.135}\Rightarrow z'\approx 0.13685\text{ m}\qquad y'=0.13685\times\frac{2}{10}=0.02737\text{ m}$$

习题3.6 P56

- 设图像的长宽比为4:3，进行以下计算
  - 100万像素手机拍摄的图像空间分辨率约为多少？
  - 1000万像素像机拍摄的图像空间分辨率约为多少？它拍摄的一幅彩色图像需多少字节来存储。
- 解：设图像宽度 w，则高度h=3w/4，图像大小为：

$$w \cdot 3w/4 = 1{,}000{,}000 \quad \Longrightarrow \quad w \approx 1154,\ h \approx 866$$

若是1000万像素的像机，则

$$w \approx 3651,\ h \approx 2738$$

- 彩色图像1个像素需3个字节，1000万像素即需3000万个字节，即30MB

习题3.6 P56

常用分辨率：640 ×480 约为30万像素

1024 ×768约为80万像素

1280 ×960 约为130万像素（1.3M）

1600 ×1200 约为200万像素（2M）

若长宽比为16:9

1280 ×720约为100万像素（720P）

1920 ×1080 约为200万像素（1080i/1080P）

The End